سلسلة ملخصات
شوم

الدوائر الكهربية

الجزء الأول

الطبعة الأولى العربية
2001

تأليف : چوزيف أدمنستر محمود ناهفى

يشمل الأساسيات الموجودة فى المناهج والمراجع.

يعلم الطرق الفعالة لحل المسائل.

يحتوى على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً.



الدار الدولية للاستثمارات الثقافية



سلسلة ملخصات شوم

فى

الدوائر الكهربية

الجزء الأول

تأليف

جوزيف أدمنستر

محمود ناهقى

ترجمة

د/ محمد جمال الدين محمد عبد الخالق

أستاذ متفرغ بكلية الهندسة جامعة حلوان

مراجعة

د/ السيد حسن شهاب

أستاذ بكلية الهندسة جامعة حلوان

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

حقوق النشر

Electronic Devices and Circuits

by

Joseph Edminster Mahmood Nahvi

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابى ـ النزهة الجديدة ـ مصر الجديدة ـ القاهرة ـ ج . م . ع .

ص . ب: 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة ـ تليفون: 2957655/2972344 فاكس : 2957655 (00202)

رقم الايداع : 2001/3211

I.S.B.N: 977-282-098-6

مقدمة الكتاب

وضع هذا الكتاب كنسخة منقحة ومزيدة من الكتاب الذى تم نشره سابقاً بنفس العنوان. وقد روعى فيه إعادة التشكيل ليكون أكثر سهولة وإيضاحاً. وأضيفت إليه عدة فصول جديدة وهى الفصل الرابع بعنوان طرق التحليل، وبه الطرق المختلفة لتحليل الشبكات الكهربية باستخدام طرق التحليل والمحددات والمصفوفات، والفصل الحادى عشر بعنوان الدوائر المتعددة الأوجه وبه تم التعرف على أنواع الدوائر المختلفة مع شرح وافٍ للنظم ثلاثية الأوجه المتزنة وغير المتزنة، والفصل الثانى عشر وهو الاستجابة الترددية والمرشحات والرنين وبه تم شرح الاستجابة الترددية ودراسة الشبكات المختلفة ذات الإمرار العالى والمنخفض ودوال الشبكات والمرشحات المثالية والعملية وغير ذلك من دوائر الرنين.

هذا وقد تم تغيير جزئى فى بعض الفصول الأخرى من ناحية المادة العلمية لتكون أكثر إيضاحاً، فقد أضيف إلى الفصل الثالث عشر جزء جديد للتعرف على الأطراف والمداخل للشبكات ذات المدخلين وأيضاً معاملات الثابت Z والثابت Y ومكافىء T للشبكة المعكوسة. هذا وقد تم ترتيب أرقام المعادلات والأشكال فى الفصل الأول والثانى والثالث والرابع وأضيفت أيضاً مجموعة من المسائل المحلولة والجديدة على مدار الكتاب كله حتى يتم الفهم الكامل لفصوله المختلفة.

هذا وقد صدر الكتاب فى جزئين:

* **الجزء الأول** يحتوى على الفصول من الفصل الأول إلى الفصل التاسع.

* **والجزء الثانى** من الفصل العاشر إلى الفصل السابع عشر، كما يحتوى كل جزء على ملحق للكتاب به ثلاثة أقسام.

د. جمال عبد الخالق

المحتويات

الفصل | صفحة

الفصل	صفحة

الفصل الأول

مقدمة

1.1 الكميات الكهربية ووحدات (SI)

تستخدم وحدات النظام الدولى (SI) خلال هذا الكتاب. والجدول 1-1 يوضح أربعة من الكميات الأساسية ووحدات النظام الدولى المترى (SI) المناظرة لها والكميات والوحدات الرئيسية الثلاثة الأخرى ووحدات (SI) المناظرة لها والغير موجودة فى الجدول هى درجة الحرارة بدرجات كلفن (K) وكمية المادة بالمُل (Mol) وشدة الاستضاءة بالكاندل (cd).

جدول 1-1

الكمية	الرمز العام	الوحدة SI	الرمز الدال علي الوحدة
الطول	L, l	متر	m
الكتلة	M, m	كيلو جرام	kg
الزمن	T, t	ثانية	s
التيار	I, i	أمبير	A

وتستنتج الوحدات الأخرى من الوحدات الأساسية السبعة. والكميات الكهربية ورموزها والمستخدمة عادة فى تحليل الدوائر الكهربية موضحة بالجدول 2-1 .

جـــدول 1-2

الكمية	الرمز العام	الوحدة SI	الرمز الدال علي الوحدة
الشحنة الكهربية	Q, q	كـــولوم	C
الجهد الكهربى	V, υ	ڤـــولت	V
المقاومة	R	أوم	Ω
التوصيلية	G	ســيمنز	S
الحث	L	هـــنرى	H
السعة	C	فــــاراد	F
التردد	f	هيـــرتز	Hz
القوة	F, f	نيـــوتن	N
الطاقة ، الشغل	W, w	جـــول	J
القدرة	P, p	وات	W
الفيض المغناطيسى	ϕ	ويبـــــر	Wb
كثافة الفيض المغناطيسى	B	تســــلا	T

وتوجدكميتان إضافيتان هما الزاوية المستوية (ويطلق عليها اسم زاوية الوجه عند تحليل الدوائر الكهربية) والزاوية المجسمة ووحدات (SI) المناظرة لها هما راديان (rad) وستراديان (sr).

وغالباً تستخدم الدرجات للتعبير عن زوايا الوجه فى الدوال الجيبية مثل $(\sin \omega t + 30^{o})$ حيث تكون ωt بالراديان وفى هذه الحالة تكون الوحدات مركبة.

ويستخدم المضروب أو المقسوم العشرى لوحدات SI كلما كان ممكناً والرموز المستخدمة فى جدول 1-3 هى قيم المضروب الذى يسبق رموز الوحدات فى جدول 1-1 ، جدول 1-2 ومثال ذلك mV تستخدم للمللى فولت 10^{-3}V كما يستخدم MW للقيمة 10^{-6}W .

جـــدول 1-3

معامل التصغير أو التكبير	قيمة المعامل	الرمز
بـيـكـو	10^{-12}	P
نـــانـــو	10^{-9}	n
مـــيكرو	10^{-6}	µ
مـلـلـى	10^{-3}	m
سـنـتـى	10^{-2}	c
كــــيلو	10^{3}	k
مـيـجـا	10^{6}	M
جـيـجـا	10^{9}	G
تيــــرا	10^{12}	T

1.2 القوة والشغل والقدرة

تتبع الوحدات المستنتجة العلاقات الرياضية التى تحكم الكميات الخاصة بها فمن العلاقة «القوة تساوى الكتلة مضروباً فى العجلة» . نجد أن الرمز (N) نيوتن يعرف بالقوة الغير متزنة التى تنتج عجلة مقدرة بواحد متر لكل مربع الثانية لكتلة قيمتها واحد كيلو جرام وبالتالى تكون العلاقة :

$$1\ N = 1\ kg.\ m/s^2$$

ويكون الشغل ناشئاً من استخدام القوة لمسافة . ووحدة الشغل وهى «الجول تكون مكافئة نيوتن متر أى أن $1\ J = 1\ N.\ m$. والشغل والطاقة لها نفس الوحدات .

والقدرة هى فعوّل الشغل أو المعدل الذى تتغير فيه الطاقة من شكل لآخر ووحدة القدرة هى «الوات» (W) وهى جول لكل ثانية (J/s) .

مثـــــال 1-1 : لحركة خطية بسيطة لكتلة قيمتها 10kg كانت العجلة الثابتة $2.0\ m/s^2$.

(أ) أوجد القوة F.

(ب) إذا كان الجسم فى حالة السكون عند t = 0 ، x = 0 أوجد المسافة وطاقة الحركة والقدرة عند t = 4 s.

(a) $$F = ma = (10\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s}^2) = 20.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 = 20.0\ \text{N}$$

(b) At $t = 4$ s,

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}(2.0\ \text{m/s}^2)(4\ \text{s})^2 = 16.0\ \text{m}$$

$$\text{KE} = Fx = (20.0\ \text{N})(16.0\ \text{m}) = 3200\ \text{N}\cdot\text{m} = 3.2\ \text{kJ}$$

$$P = \text{KE}/t = 3.2\ \text{kJ}/4\ \text{s} = 0.8\ \text{kJ/s} = 0.8\ \text{kW}$$

1.3 الشحنة الكهربية والتيار :

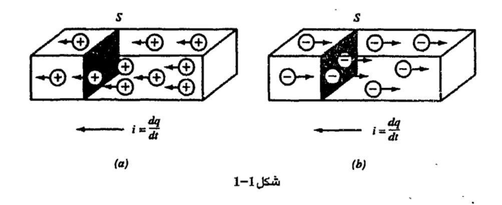
تُعرف وحدة التيار وهى الأمبير (A) بالتيار الثابت المار خلال موصلين متوازيين طويلين جداً وقطاع كل منهما صغير جداً والمسافة بينما هى متر واحد موجودان فى الفراغ حيث ينتج بينهما قوة تساوى 2.0×10^{-7} نيوتن لكل متر من الطول. كما يوجد مفهوم آخر أكثر فائدة للأمبير وهو التيار الناشئ من حركة الشحنات وهذه الشحنات هى واحد كولوم من الشحنة تتحرك خلال سطح معين فى الثانية الواحدة. وعند كتابة ذلك كدالة فى الزمن يكون $i\ (A) = dq/dt\ (C/s)$ وبذلك تكون وحدة الشحنة المستنتجة وهى الكولوم (C) مساوية للقيمة أمبير-ثانية.

والشحنات المتحركة قد تكون موجبة أو سالبة. والأيونات الموجبة المتحركة لليسار فرضاً فى وسط سائل شكل 1-1 (a) ينشأ عنها تياراً متجهاً أيضاً لليسار فإذا اخترقت هذه الأيونات السطح S بسرعة كولوم واحد لكل ثانية فإن التيار الناشئ هو واحد أمبير. وينتج عن الأيونات السالبة المتحركة إلى اليمين أيضاً تياراً متحركاً يساراً.

ويعتبر التيار المار فى الموصلات المعدنية والذى يحدث من خلال الإلكترونات التى تشغل المدار الخارجى للتركيب الذرى ذو أهمية كبرى فى تحليل الدوائر الكهربية. ففى النحاس مثلاً يكون إلكترون واحد فى المدار الخارجى ذو إنجذاب ضعيف للنواة التى فى الوسط وبذلك يتحرك بحرية من

ذرة إلى أخرى داخل التركيب البلورى للذرات . وفى درجات الحرارة العادية تكون هناك حركة ثابتة عشوائية لهذه الإلكترونات . ويتحرك بحرية فى المكعب الواحد من النحاس ما يقرب 8.5×10^{28} إلكترون توصيل وهذا ما يعطى فكرة عن إمكانية التوصيل للنحاس .

وشحنة الإلكترون هى $-e = -1.602 \times 10^{-19}$ C وبذلك فإن تيار قيمته واحد أمبير يتسبب فى مرور ما يقرب من 6.24×10^{18} إلكترون كل ثانية خلال قطاع الموصل .



شكل 1-1

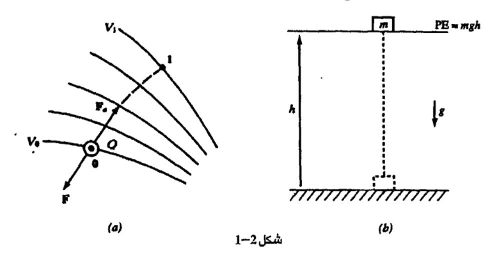
مثـــال 1-2 : موصل يمر به تيارثابت قيمته خمسة أمبير كم إلكترون يمر على نقطة ثابتة فى هذا الموصل فى دقيقة واحدة .

$$5\ \text{A} = (5\ \text{C/s})(60\ \text{s/min}) = 300\ \text{C/min}$$

$$\frac{300\ \text{C/min}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{C/electron}} = 1.87 \times 10^{21}\ \text{electrons/min}$$

1.4 الجهد الكهربى :

ينشأ عن الشحنة الكهربية قوة فى المجال الكهربى بحيث إذا لم تقاوم ستؤدى إلى تعجيل حركة الجزيئات الحاملة للشحنة . والمهم هنا هو الشغل اللازم لتحريك الشحنة ضد المجال كما هو موضح بشكل 2-1(a) ولذلك إذا كان المطلوب شغل قدره واحد جول لتحريك الشحنة Q (واحد كولوم) من الوضع 0 إلى الوضع 1 . فإن الوضع 1 يكون ذو جهد (واحد فولت) بالنسبة للوضع 0، 1 V = 1 J/C. ويكون هذا الجهد الكهربى قادراً على إحداث شغل تماماً مثل الشغل المبذول على الكتلة فى شكل 2-1 (b) والتى رفعت ضد قوة الجاذبية الأرضية g للمسافة h فوق سطح الأرض. وطاقة الوضع mgh تمثل القابلية لبذل الشغل حينما تُترك الكتلة m . وإذا ما بدأت الكتلة فى السقوط فإنها تبدأ بعجلة تزايدية وتتحول طاقة الوضع هذه إلى طاقة حركة .



شكل 2–1

مثـــــال 3-1 : فى دائرة كهربية المطلوب نقل 0.5 μC من نقطة أ إلى نقطة ب عن طريق طاقة قيمتها 9.25 μJ فما هو الجهد الكهربى الناشئ بين النقطتين؟

$$V = \frac{9.25 \times 10^{-6}\ \text{J}}{0.5 \times 10^{-6}\ \text{C}} = 18.5\ \text{V} \qquad \text{one volt = one joule per coulomb}$$

1.5 الطاقة والقدرة الكهربية :

سنتناول فى الفصول التالية الطاقة الكهربية بالجول والتى تتعامل مع السعة والحث. والمجالات الكهربية والمغناطيسية لها ذات القدرة على تخزين الطاقـة . ومعدل تحويل الطاقة بالجول لكل ثانية هـو القـدرة الكهربية بالواط وعلى ذلك يـؤدى حاصل ضرب الجهد فى التيار إلى القـدرة الكهربية

$P = \upsilon i$، $1\ W = 1\ V.\ 1\ A$. وأيضاً $V.\ A = (J/C).(c/s) = J/s = W$ ويمكن القول أيضاً أن القدرة هى المعامل التفاضلى للطاقة $P = dw / dt$ ، وبذلك تكون القدرة اللحظية عادة دالة فى الزمن . وفى الفصول التالية يؤخذ متوسط القدرة خلال فترة زمنية P_{avg} وأيضاً ستؤخذ القيمة المتوسطة الفعالة وهو جذر متوسط المربعات (RMS) وذلك عند اعتبار القيم الجيبية للجهد والتيار .

مثـــال 4-1 : إذا كان فرق الجهد بين طرفى مقاومة هو 50.0 V ومرت شحنة قيمتها 120.0 C على نقطة معينة كل دقيقة . فاحسب بأى معدل تتحول هذه الطاقة إلى حرارة .

$$(120.0\ C/min) / (60\ s/min) = 2.0\ A \qquad P = (2.0\ A)(50.0\ V) = 100.0\ W$$

حيث $1\ W = 1\ J/S$ ، فإن معدل تغير تحول الطاقة هو مائة چول لكل ثانية .

1.6 الدوال الثابتة والمتغيرة

للتمييز بين الكميات الثابتة والكميات المرتبطة بالزمن فإنه يرمز بالحروف الكبيرة للكميات الثابتة وبالحروف الصغيرة لتلك المرتبطة بالزمن . ومثال ذلك أنه لتيار ثابت قيمته عشرة أمبير يكتب هكذا $I = 10.0\ A$ ، بينما يكون العشرة أمبير المرتبطة بالزمن هكذا $i = 10.0\ f(t)\ A$ ، والدوال المعتادة فى تحليل الدوائر تكون دوال جيبية $i = 10.0 \sin \omega t\ (A)$ والدالة الزائدية هى $\upsilon = 15.0 e^{-at}\ (V)$.

مسائل محلولة

1-1 أثرت قوة متغيرة طبقاً للعلاقة $F = 12/x^2\ (N)$ على نقطة فى اتجاه x .

(أ) أوجد الشغل المبذول فى المسافة $1\ m \leq x \leq 3\ m$.

(ب) ما هى القوة الثابتة المؤثرة لنفس المسافة والتى ينشأ عنها نفس الشغل .

$$dW = F\,dx \qquad \text{so} \qquad W = \int_1^3 \frac{12}{x^2}\,dx = 12\left[\frac{-1}{x}\right]_1^3 = 8\ J$$

$$8\ J = F_c(2\ m) \qquad \text{or} \qquad F_c = 4\ N$$

1-2 تحـولت طاقـة كهربية إلى طاقـة حراريـة بمعدل 7.56 kJ/min فى مقـاومة يمـر خـلالها شحنة 270 C/min. ما هو فرق الجهد الكهربى على طرف المقاومة.

من العلاقة P = VI

$$V = \frac{P}{I} = \frac{7.56 \times 10^3 \text{ J/min}}{270 \text{ C/min}} = 28 \text{ J/C} = 28 \text{ V}$$

1-3 فى أحد عناصر دائرة كهربية كان التيار i = 2.5 sin ωt (mA) حيث ω هو التردد مقاس بوحدات rad/s وكان فرق الجهد على طرفيه υ = 45 sin ωt (V). أوجد متوسط القدرة P_{avg} والطاقة المحولة فى دورة واحدة من الدالة الجيبية.

الطاقة هى تكامل القدرة اللحظية بالنسبة للزمن.

$$W_T = \int_0^{2\pi/\omega} vi\, dt = 112.5 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t\, dt = \frac{112.5\, \pi}{\omega} \text{ (mJ)}$$

وبذلك تكون متوسط القدرة:

$$P_{avg} = \frac{W_T}{2\pi/\omega} = 56.25 \text{ mW}$$

لاحظ أن P_{avg} غير مرتبطة بقيمة ω.

1-4 الوحدة المستخدمة عادة للطاقة بالنسبة لشركات توزيع الكهرباء هى الكيلو واط ساعة (kWh).
(أ) كم جـولا فى 1 kWh. (ب) إذا كـان أحد التلفزيونات الملونة ذو القـدرة 75 W يعـمل من السابعة مساءاً حتى الحادية عشرة والنصف مساءاً فما هى الطاقة الكلية التى يمثلها هذا الأداء بالكيلو واط ساعة وأيضاً بالميجا جول.

(a) .1 kWh = (1000 J/s) (3600 s/h) = 3.6 Mj

(b) (75.0 W) (4.5 h) = 337.5 Wh = 0.3375 kWh

(0.3375 kWh) (3.6 MJ/kWh) = 1.215 MJ

1-5 سلك نحاسى AWG # 12 (من النوع شائع الاستخدام فى التوصيلات) يحتوى هذا المقاس على 2.77×10^{23} إلكترون حر لكل متر من طول السلك وذلك باعتبار وجود إلكترون واحد حر للتوصيل بكل ذرة. فما هى النسبة المئوية للإلكترونات التى تمر خلال مقطع معين إذا كان التيار الثابت المار بالموصل هو 23.0 A.

$$\frac{25.0\ \text{C/s}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{C/electron}} = 1.56 \times 10^{20}\ \text{electron/s}$$

$$(1.56 \times 10^{20}\ \text{electrons/s})(60\ \text{s/min}) = 9.36 \times 10^{21}\ \text{electrons/min}$$

$$\frac{9.36 \times 10^{21}}{2.77 \times 10^{23}}(100) = 3.38\%$$

1-6 كم عدد الإلكترونات التى تمر خلال نقطة بالنسبة لمصباح كهربى قدرته 100 W خلال ساعة إذا كان الجهد الثابت هو 120 V.

$$100\ \text{W} = (120\ \text{V}) \times I(\text{A}) \qquad I = 5/6\ \text{A}$$

$$\frac{(5/6\ \text{C/s})(3600\ \text{s/h})}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{C/electron}} = 1.87 \times 10^{22}\ \text{electrons per hour}$$

1-7 تقاس البطاريات المعتادة للسيارات (12.0V) طبقاً لقيمة الأمبير ساعة. فإذ كان تيار التفريغ لبطارية 70-A.h هو 3.5 A خلال فترة 20 h . (أ) باعتبار أن الجهد يبقى ثابت القيمة. أوجد الطاقة والقدرة المعطاة خلال فترة التفريغ لهذه البطارية. (ب) كرر السابق لمعدل تفريغ 7.0 A.

(a) (3.5 A) (12 V) = 42.0 W (or J/s)

(42.0 J/s) (3600 s/h) (20 h) = 3.02 MJ

(b) (7.0 A) (12 V) = 84.0 W

(48.0 J/s) (3600 s/h) (10 h) = 3.02 MJ

ومقنن الأمبير ساعة هو قيمة الطاقة المخزنة بالبطارية وبالتالى هو الطاقة التى يتم تفريغها كلياً وهى قيمة ثابتة سواء تم التفريغ فى عشر ساعات أو عشرين ساعة. وحيث أن القدرة هى معدل تحويل الطاقة فإن القدرة خلال عشر ساعات تفريغ تكون ضعف القدرة خلال عشرين ساعة تفريغ.

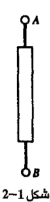


الفصل الثانى

مفهـــوم الدائـــرة

2.1 العناصر الغير فعالة والفعالة :

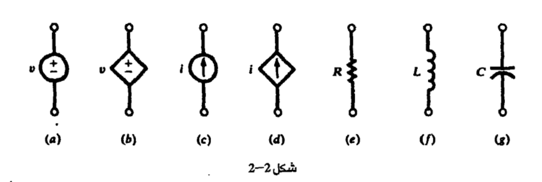
تمثل النبيطة الكهربية فى الدائرة أو الشبكة الكهربية بعنصر أو أكثر متصلة على التوالى أو التوازى ولكل عنصر طرفان. وبتحليل شكل الدائرة فإنه يمكن معرفة حقيقة أداء كل نبيطة فيها. والشكل العام لعنصر ذو طرفين مبين بشكل 2-1 كنبيطة واحدة ممثلة برمز على شكل مستطيل وطرفين متصلين بها عند الطرفين A ، B والعناصر الفعالة هى منابع الجهد أو التيار والتى تكون قادرة على إمداد الطاقة للشبكة. بينما تكون المقاومات والملفات والمكثفات عناصر غير فعالة تأخذ الطاقة من المنابع وهى إما أن تحولها إلى شكل آخر من أشكال الطاقة أو تختزنها كمجال كهربى أو مغناطيسى.



شكل 2–1

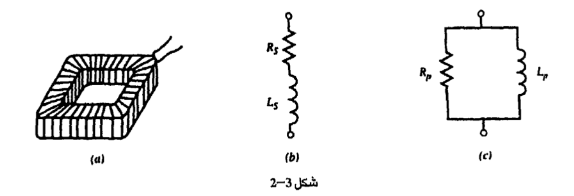
ويبين شكل 2-2 سبع عناصر أساسية فى الدائرة. فالعنصران (a)، (b) هما منبعان للجهد والعنصران (c)، (d) هما منبعان للتيار. ومنبع الجهد الذى لا يتأثر بالتغيير فى الدائرة المتصل بها يسمى منبع مطلق وهو ممثل بدائرة فى شكل 2-2 (a) وجهد المنبع التابع والذى يتغير بطريقة أو بأخرى حسب ظروف الدائرة المتصل بها يرمز له بمعين شكل 2-2 (b). ومنابع التيار يمكن هى الأخرى أن

تكون مطلقة أو تابعة والرموز المناظرة لها هى المبينة فى شكل (c)، شكل (d) والعناصر الغير فعالة الباقية هى المبينة فى أشكال (e)، (f)، (g) شكل 2-2 .



شكل 2—2

وأشكال الدوائر المبينة هنا يطلق عليها دوائر ذات عناصر مجمعة حيث يستخدم العنصر الواحد فى أحد المواضع ليمثل مقاومة أو حث أو سعة يكون موزعاً خلال العنصر . ومثال ذلك للملف المحتوى على عدد كبير من اللفات من سلك معزول تكون له مقاومة موزعة خلال الطول الكلى للسلك. ومع هذا فإنها تمثل بمقاومة مجمعة كما فى شكل 3-2 (b) أو (c). وبالمثل فإن حث الملف يجمع فى مكان واحد على التوالى أو على التوازى مع المقاومة شكل 3-2 (c) . وعلى العموم فإنه يمكن تمثيل الملف بدائرة توالى أو توازى وربما يُفضل بالنسبة لتردد جهد المنبع اختيار أحد الطريقتين لتمثيل النبيطة .

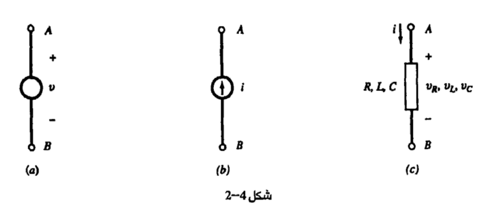


شكل 3—2

2.2 اصطلاحات الإشارات :

لا بد لتمثيل منبع الجهد تمثيلاً كاملاً من وجود دالة الجهد وتحديد القطبية وتوضيع الإشارة + والإشارة - بجوار مكان توصيل منبع الجهد عند طرفيه . فإذا كان الجهد مثلاً $\upsilon = 10.0 \sin \omega t$ كما

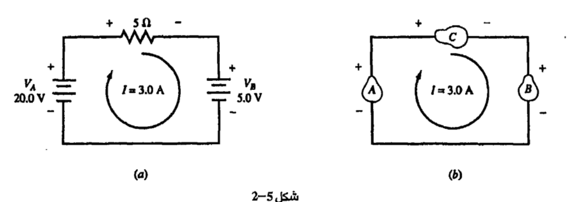
فى شكل 2-4 (a) فإن الطرف A يكون موجباً بالنسبة للطرف B للقيم $0 < \omega t < \pi$ والطرف B يكون موجباً بالنسبة للطرف A للقيم $\pi < \omega t < 2\pi$ للمنحنى الجيبى للدالة لأول ذبذبة .



شكل 2-4

وبالمثل فإن منبع التيار يحتاج لتحديد إتجاهه كما يحدد دالته كما فى شكل 2-4 (b) وبالنسبة للعناصر الغير فعالة R، L، C المبينة شكل 2-4 (c). فإن الطرف الذى يدخل فيه التيار يعامل على أساس أنه موجب بالنسبة للطرف الذى يخرج منه التيار .

وإشارة القدرة مبينة بدائرة تيار مستمر شكل 2-5 (a) ذات جهود ثابتة للمنبع $V_A = 20.0$ V، $V_B = 5.0$ V ، ومقاومة واحد 5-Ω وبذلك يكون التيار فى اتجاه عقرب الساعة وقيمته 3.0 A. والآن باعتبار شكل 2-5 (b) فإن القدرة ستستهلك فى العنصر حينما يمر التيار فى العنصر من الطرف الموجب وتحسب القدرة بالعلاقة VI أو I^2R والتى تستهلك حينئذ فى كل من المقاومة والمنبع V_B بالقيمين 45.0 W، 15 W على التوالى ويعتبر المنبع V_A هو منبع القدرة للدائرة نظراً لأن التيار يدخل خلاله من الطرف السالب له والقدرة بالنسبة لهذا المنبع هى $P = VI = 60.0$ W تؤكد أن القدرة المستهلكة فى المقاومة والمنبع V_B هى التى يوفرها المنبع V_A .



شكل 2-5

2.3 علاقات الجهد والتيار :

تعرف العناصر الغير فعالة وهى المقاومة R، والحث L والسعة C بعلاقة الجهد والتيار الخاصة بكل عنصر على حدة وعلى سبيل المثال : إذا كان الجهد والتيار لعنصر ما مرتبطين بقيم ثابتة فيكون العنصر مقاومة R وتكون R هى ثابت التناسب بين الجهد والتيار $\upsilon = Ri$ وبالمثل إذا كان الجهد هو معامل تفاضلى للتيار فيكون العنصر حثاً. وتكون L هى معامل التناسب. $\upsilon = L\,di/dt$ وأخيراً إذا كان التيار فى العنصر معامل تفاضلى للجهد فيكون العنصر سعة C وهى معامل التناسب $i = C\,d\upsilon/dt$ والجدول 2-1 يلخص هذه العلاقات للثلاث عناصر الغير فعالة لاحظ إتجاهات التيار وإشارات الجهد. باعتبار المقاومة هى Resistanc، الحث Inductance والسعة هى Capacitance .

جدول 2-1

Circuit element	Units	Voltage	Current	Power
Resistance	ohms (Ω)	$v = Ri$ (Ohm's law)	$i = \frac{v}{R}$	$p = vi = i^2R$
Inductance	henries (H)	$v = L\frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L}\int v\,dt + k_1$	$p = vi = Li\frac{di}{dt}$
Capacitance	farads (F)	$v = \frac{1}{C}\int i\,dt + k_2$	$i = C\frac{dv}{dt}$	$p = vi = Cv\frac{dv}{dt}$

2.4 المقاومـــة

جميع النبائط الكهربية التى تستهلك الطاقة يجب أن تحتوى على مقاوم (تسمى أحياناً مقاومة) فى تركيبة الدائرة بينما يختزن الملف المكثف الطاقة فإنها ترجع هذه الطاقة مع الوقت إلى المنبع أو إلى أى عنصر آخر فى الدائرة وتكون القـدرة فى المقـاوم $p = \upsilon i = i^2R = \upsilon^2 / R$ موجبة دائماً. كما هو مبين فى مثال 2-1 التالى وتكون الطاقة بذلك هى تكامل القدرة اللحظية.

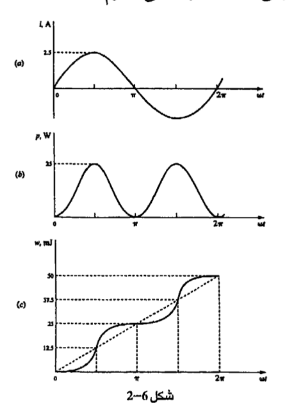
$$w = \int_{t_1}^{t_2} p\,dt = R\int_{t_1}^{t_2} i^2\,dt = \frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} v^2\,dt$$

مثـــال 2-1: مقاومة قيمتها $4.5\ \Omega$ يمر فيها التيار $i = 2.5 \sin \omega t$ (A). أوجد الجهد والقدرة والطاقة خلال دورة واحدة $\omega = 500\ \pi$ rad/s.

$$v = Ri = 10.0 \sin \omega t \ \text{(V)}$$
$$p = vi = i^2R = 25.0 \sin^2 \omega t \ \text{(W)}$$

$$w = \int_0^t p\,dt = 25.0\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\,\omega t}{4\omega}\right] \ \text{(J)}$$

أشكال التيار i والقدرة p والطاقة w مبينه فى شكل 2-6 وفيها يبدو أن القدرة p دائماً موجبة وأن الطاقة w تتزايد مع الزمن وهى الطاقة المستهلكة فى المقاوم.



شكل 2-6

2.5 الحث :

العنصر الذى يختزن الطاقة كمجال مغناطيسى يسمى ملف حثى (يطلق عليه أحياناً الحث). وتختزن الطاقة عن طريق التيار المتغير مع الزمن خلال جزء من الدورة ثم تعود إلى المنبع خلال أجزاء أخرى منها وحينما يُفصل الملف من المنبع يتوقف المجال المغناطيسى أى أنه لا تختزن الطاقة بدون وجود المنبع والملفات فى المحركات الكهربية والمحولات. والنبائط المشابهة يمكن أن تحتوى على حث فى مكونات دائرتها حتى أنه فى الموصلات المتوازية ينشأ الحث والذى يجب أخذه فى الاعتبار مع معظم الترددات وفيما يلى علاقات القدرة والطاقة.

$$p = vi = L\frac{di}{dt}i = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Li^2\right]$$

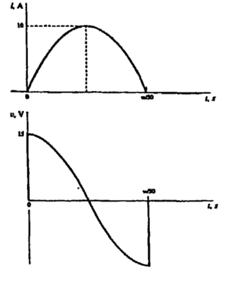
$$w_L = \int_{t_1}^{t_2} p\,dt = \int_{t_1}^{t_2} Li\,dt = \frac{1}{2}L[i_2^2 - i_1^2]$$

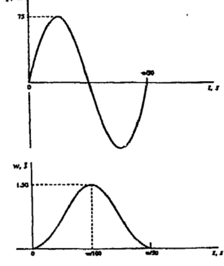
الطاقة المختزنة كمجال مغناطيسى فى الحث هى $W_L = 1/2\ Li^2$.

مثـــال 2-2 : ملف له حث 30 mH يمر به تيـار $i = 10.0 \sin 50t$ (A) فى الفترة $0 > t > (\pi/50)$s أوجد الجهد والقدرة والطاقة لهذا الحث.

$$v = L\frac{di}{dt} = 15.0 \cos 50t \text{ (V)} \qquad p = vi = 75.0 \sin 100t \text{ (W)} \qquad w_L = \int_0^t p\,dt = 0.75(1 - \cos 100t) \text{ (J)}$$

كما هو مبين شكل 7-2 تكون الطاقة صفراً عند $t = 0$ وعند $t = (\pi/50)$ s حيث أنها اختزنت فى النصف الأول من الموجة وأعيدت للمنبع فى النصف الثانى.





شكل 7–2

2.6 السعــــة :

العنصر الذى يختزن الطاقة كمجال كهربى يسمى مكثف سعوى (يسمى أحياناً سعة) فإذا كان الجهد متغيراً خلال الدورة فإن الطاقة سوف تختزن فى جزء منها ثم تسترجع فى الجزء الثانى وبينما لا يحتفظ الحث بالطاقة بعد زوال المنبع لأن المجال المغناطيسى يزول. نجد أن السعة تحتفظ بالشحنة ويبقى المجال الكهربى بعد زوال المنبع. وهذه الحالة تبقى حتى تتاح الفرصة لتفريغ الطاقة خلال فترة زمنية. والشحنة $q = C\upsilon$ على المكثف تنتج مجال كهربى فى المادة العازلة التى تكون محور اختزان الطاقة وفى المكثف ذو اللوحين المتوازيين تلاحظ تراكم الشحنة على أحد اللوحين بينما تتناقص على اللوح الآخر وهذه الظاهرة (تعادل الشحنة) تحدث عند تفريغ المكثف والعلاقات الخاصة بالقدرة والطاقة كما يلى:

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Cv^2\right]$$

$$w_C = \int_{t_1}^{t_2} p\,dt = \int_{t_1}^{t_2} Cv\,dv = \frac{1}{2}C[v_2^2 - v_1^2]$$

وتكون الطاقة المختزنة كمجال كهربى فى المكثف هى $W_C = 1/2\ C\upsilon^2$.

مثـــال 2-3 : فى الفترة من $0 > t > 5\ \pi$ ms كان الجهد على طرفى مكثف 20-µF هو $\upsilon = 50.0 \sin 200t$ (V). أوجد الشحنة والقدرة والطاقة وارسم الطاقة WC باعتبار أن $w = 0$ عند $t = 0$.

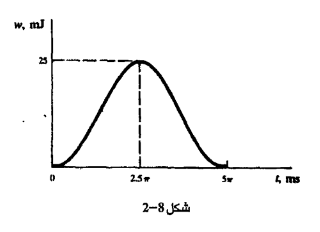
$$q = Cv = 1000 \sin 200t \quad (\mu C)$$

$$i = C\frac{dv}{dt} = 0.20 \cos 200t \text{ (A)}$$

$$p = vi = 5.0 \sin 400t \text{ (W)}$$

$$w_C = \int_{t_1}^{t_2} p\,dt = 12.5[1 - \cos 400t] \text{ (mJ)}$$

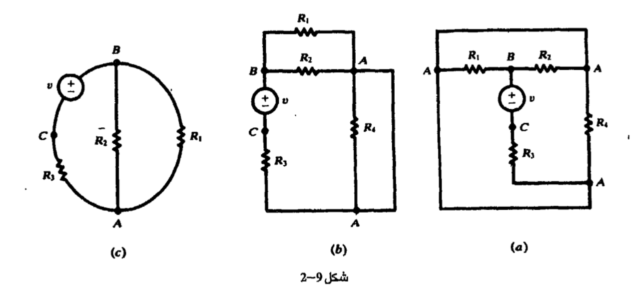
فى الفترة من $0 > t > 2.5\ \pi$ ms يتزايد الجهد والشحنة من القيمة صفر إلى القيمة 50.0 V ، 1000 µC على الترتيب. وشكل 8-2 يبين الطاقة المختزنة حيث تتزايد إلى القيمة 25 mJ ثم تتناقص إلى الصفر حيث تعود إلى المنبع.



شكل 8–2

2.7 أشكال الدائـرة :

يمكن تمثيل شكل الدائرة بطرق مختلفة حيث تبدو متباينة ولكنها فى الحقيقة تؤدى نفس الغرض وعليه فإن شكل الدائرة فى أى مسألة ربما لا يمثل أحسن طرق الحل . وعلى ذلك فإن شكل الدائرة يجب أن يفحص قبل الحل ويمكن إعادةرسمه عند الضرورة لتوضيح طريقة توصيل عناصر الدائرة بعضها بعض وأحد الأمثلة مبين فى شكل 9-2 حيث رسمت ثلاث أشكال لنفس الدائرة ففى شكل 9-2 (a) يبدو أن نقاط التوصيل الثلاث المرموز لها بالرمز A رسمت كنقطتين للتوصيل فى شكل (b) بينما نجد المقاوم R4 مقصوراً ويمكن إزالته عند تحليل الدائرة وبذلك تبدو فى شكل 9-2 (c) نقطة التوصيل A متصلة بالثلاث عناصر .



شكل 9–2

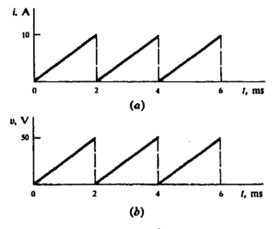
مسائل محلولة

2-1 مقاوم قيمته $25.0\ \Omega$ متصل بجهد قيمته $u = 150.0 \sin 377t$ (V) . أوجد التيار المار والقدرة .

$$i = \frac{v}{R} = 6.0 \sin 377t \text{ (A)} \qquad p = vi = 900.0 \sin^2 377t \text{ (W)}$$

2-2 إذا كان التيار فى مقاوم قيمته 5Ω يزداد خطياً من القيمة 0 إلى 10 A فى 2 ms وعند $t = 2^+$ ms كان التيار 0 مرة أخرى . ثم ازداد خطياً للقيمة 10 A عند $t = 4$ ms وهذا الشكل تكرر كل 2 ms ارسم شكل الجهد .

حيث أن $v = Ri$ فإن القيمة العظمى للجهد يجب أن تكون $(5)\ (10) = 50$ V . وشكل 2-10 يبين رسماً لكل من التيار والجهد ومن المؤكد حدوث التشابه بين الدالتين .



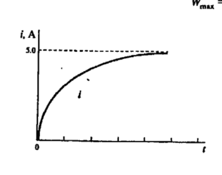
شكل 2-10

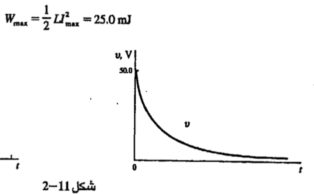
2-3 ملف حثه 2.0 mH يمر به تيار $i = 5.0\ (1 - e^{-5000t})$ (A) . أوجد الجهد والقيمة العظمى للطاقة المختزنة .

$$v = L\frac{di}{dt} = 50.0e^{-5000t} \text{ (V)}$$

شكل 2-11 يبين علاقات الجهد والتيار بالنسبة للزمن وحيث أن أقصى قيمة للتيار هى 5.0 A فإن أقصى قيمة للطاقة هى :

$$W_{max} = \frac{1}{2} L I^2_{max} = 25.0 \text{ mJ}$$





شكل 2-11

2-4 ملف حثه 3.0 mH متصل بجهد يتغير مع الزمن حيث يكون فى الفترة 0 > t > 2 ms، هو 15.0 V وفى الفترة من 2 > t > 4 ms هو 30.0 V. أوجد التيار المناظر فى هذه الفترات وارسم كل من υ_L و i فى هذه الفترة.

For $0 > t > 2$ ms,

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t v\,dt = \frac{1}{3\times10^{-3}}\int_0^t 15.0\,dt = 5\times10^3 t \text{ (A)}$$

For $t = 2$ ms,

$$i = 10.0 \text{ A}$$

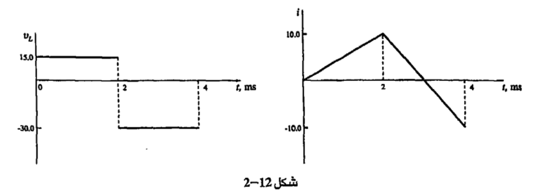
For $2 > t > 4$ ms,

$$i = \frac{1}{L}\int_{2\times10^{-3}}^t v\,dt + 10.0 = 10.0 + \frac{1}{3\times10^{-3}}\int_{2\times10^{-3}}^t -30.0\,dt$$

$$= 10.0 + \frac{1}{3\times10^{-3}}[-30.0t + (60.0\times10^{-3})] \text{ (A)}$$

$$= 30.0 - (10\times10^3 t) \text{ (A)}$$

انظر شكل 2-12.



شكل 2-12

2-5 مكثف سعته 60.0 µF عليه جهد $\upsilon = 25.0 \times 103\ t$ (V) فى الفترة 0 > t > 2 ms ارسم شكلاً لكل من i، p، w لهذه الفترة وأوجد أيضاً W_{max}.

For $0 > t > 2$ ms.

$$i = C\frac{dv}{dt} = 60\times10^{-6}\frac{d}{dt}(25.0\times10^3 t) = 1.5 \text{ A}$$

$$p = vi = 37.5\times10^3 t \text{ (W)}$$

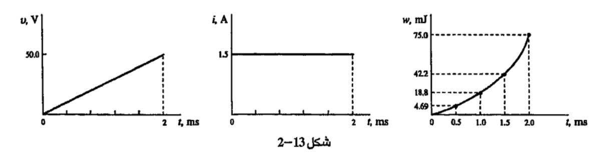
$$w_C = \int_0^t p\,dt = 1.875\times10^4 t^2 \text{ (mJ)}$$

انظر شكل 2-13.

$$W_{max} = (1.875\times10^4)(2\times10^{-3})^2 = 75.0 \text{ mJ}$$

or

$$W_{max} = \frac{1}{2}CV_{max}^2 = \frac{1}{2}(60.0\times10^{-6})(50.0)^2 = 75.0 \text{ mJ}$$



شكل 13–2

2-6 شحن مكثف سعته 20.0 μF خطياً من 0 إلى 400 μC خلال 5.0 ms أوجد دالة الجهد وقيمته W_{max}.

$$q=\left(\frac{400\times10^{-6}}{5.0\times10^{-3}}\right)t=8.0\times10^{-2}t\ \text{(C)}$$

$$v=q/C=4.0\times10^{3}t\ \text{(V)}$$

$$V_{max}=(4.0\times10^{3})(5.0\times10^{-3})=20.0\ \text{V} \qquad W_{max}=\frac{1}{2}CV_{max}^2=4.0\ \text{mJ}$$

2-7 مقاومة $R = 2\ \Omega$ وحث $L = 2$ mH، سعة $C = 500\ \mu F$ متصلة على التوالي يمر خلالها تياراً يزداد خطياً من zero إلى 10 A في الفترة من $0 \le t \le 1$ ms ويستمر التيار 10 A للفترة $1\ \text{ms} \le t \le 2$ ms ثم يتناقص خطياً من القيمة 10 A عند $t = 2$ ms إلى القيمة zero عند $t = 3$ ms ارسم شكل كل من V_C، v_L، V_R، v_R.

يجب أن يكون دالة مع الزمن مطابقة لدالة i. والجهد قيمته $V_{max} = 2\ (10) = 20$ V للفترة $0 < t < 1$ ms.

$$\frac{di}{dt}=10\times10^{3}\ \text{A/s} \qquad \text{and} \qquad v_L=L\frac{di}{dt}=20\ \text{V}$$

عند $di / dt = 0$ للفترة $1\ \text{ms} < t < 2$ ms تكون $v_L = 0$.

وباعتبار أن الشحنة الابتدائية على المكثف = صفراً.

$$v_C=\frac{1}{C}\int i\,dt$$

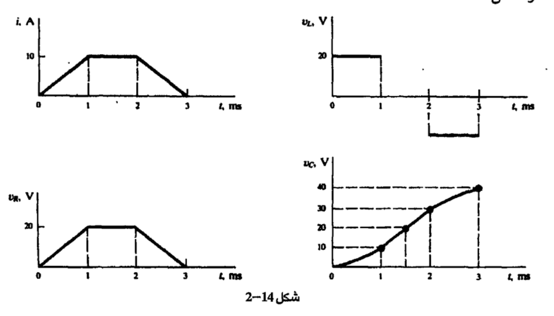
وللفترة $0 \le t \le 1$ ms.

$$v_C=\frac{1}{5\times10^{-4}}\int_0^t 10^4 t\,dt=10^7t^2\ \text{(V)}$$

يصل الجهد للقيمة 10 V عند 1 ms للفترة $1 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms}$.

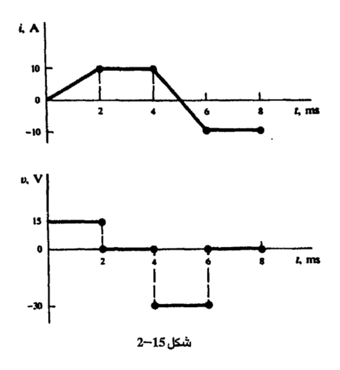
$$\upsilon C = (20 \times 10^3)(t - 10^{-3}) + 10 \text{ (V)}$$

انظر شكل 2-14 .



شكل 2–14

2-8 شكل 2-15 يبين رسماً لتغير كل من التيار والجهد كدالة مع الزمن لدائرة ذات عنصر واحد بين نوع هذا العنصر .



شكل 2–15

لا يمكن أن يكون هذا العنصر مقاومة حيث أن قيم υ، i ليست متناسبة . υ هى تكامل i فى الفترة $2\ ms < t < 4\ ms$، $i \neq 0$ بينما الجهد υ يظل ثابتاً للقيمة صفر وبذلك لا يمكن أن يكون العنصر مكثف . للفترة $0 < t < 2\ ms$.

$$\frac{di}{dt} = 5 \times 10^3\ A/s \qquad \text{and} \qquad v = 15\ V$$

وبالتالى

$$L = v \Big/ \frac{di}{dt} = 3\ mH$$

(اختبر الفترة $4\ ms < t < 6\ ms$. حيث L يجب أن يكون لها نفس القيمة)

2-9 أوجد الجهد للتوصيلة المبينة شكل 2-16 لما يلى :

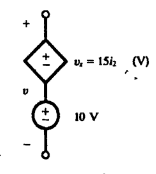
(أ) $i_2 = 1\ A$. (ب) $i_2 = -2\ A$. (جـ) $i_2 = 0\ A$.

الجهد υ هو مجموع جهد المنبع المطلق 10 V وجهد المنبع ذو التيار التابع υ_x. لاحظ أن المعامل الحسابى 15 المضروب فى تيار التحكم ذو وحدات مقاومة Ω.

(a) $\upsilon = 10 + \upsilon_x = 10 + 15\ (1) = 25\ V$

(b) $\upsilon = 10 + \upsilon_x = 10 + 15\ (-2) = -20\ V$

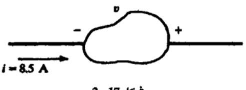
(c) $\upsilon = 10 + 15\ (0) = 10\ V$



شكل 2–16

2-10 أوجد القــدرة المستهلكة فى دائرة ما بها عدة عناصر ومبينة تخطيطاً شكل 2-17 لكل من :

(أ) $\upsilon = 50\ V$، (ب) $\upsilon = -50\ V$.



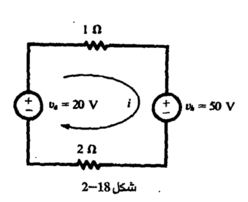
شكل 2–17

حيث أن التيار يدخل الدائرة من ناحية الإشارة السالبة فإن :

(a) $p = -\upsilon i = -(50)(8.5) = -425$ W

(a) $p = -\upsilon i = -(-50)(8.5) = 425$ W

2-11 أوجد القدرة التى يعطيها المنبعان شكل 18-2.



شكل 2–18

$$i = \frac{20-50}{3} = -10\text{ A}$$

القدرات المسحوبة من المنبعين هى :

$$p_a = -\upsilon_a i = -(20)(-10) = 200\text{ W}$$
$$p_b = \upsilon_b i = (50)(-10) = -500\text{ W}$$

وحيث أن القـدرة المعطاة تكون سالبة بالنسبة للقدرة المستهلكة فإن المنبع υ_b يعطى 500 W والمنبع υ_a يستهلك 200 W وبذلك تكون القدرة فى المقاومتين هى 300 W.

2-12 مقاومة قيمتها 25.0 Ω عليها جهداً $\upsilon = 150.0 \sin 377t$ (V) أوجد القدرة p والقدرة المتوسطة P_{avg} خلال دورة واحدة.

$$i = \upsilon / R = 6.0 \sin 377t\ (\text{A})$$

$$p = \upsilon i = 900.0 \sin^2 377t\ (\text{W})$$

تنتهى دورة دالة كلا من الجهد والتيار عند $377t = 2\pi$ وللحصول على P_{avg} نكامل دالة القدرة خلال نصف دورة $377t = \pi$ وبذلك .

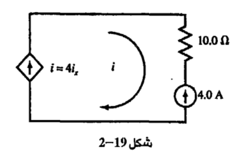
$$P_{avg} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 900.0 \sin^2(377t)d(377t) = 450.0 \text{ (W)}$$

2-13 أوجد الجهد على طرفى المقاوم $10.0\ \Omega$ فى شكل 2-19 إذا كان تيار التحكم i_x فى المنبع التابع (أ) 2A، (ب) 1 A-.

$$i = 4i_x - 4.0 ; \quad \upsilon_R = iR = 40.0i_x - 40.0 \text{ (V)}$$

$$i_x = 2 ; \quad \upsilon_R = -40.0 \text{ (V)}$$

$$i_x = -1 ; \quad \upsilon_R = -80.0 \text{ (V)}$$



شكل 2–19

مسائل إضافية

2-14 إذا كان الجهد على طرفى مقاومة هو V = 1.5 mV . أوجد التيار إذا كانت القدرة المستهلكة (أ) 27.75 nW ، (ب) 1.20 µW . الجواب 18.5 µA ، 0.8 mA .

2-15 مقاومة قيمتها $5.0\ \Omega$ يمر بها تيار قيمته $i = 5.0 \times 10^3\ t$ (A) فى الفترة $0 \geq t \geq 2$ ms . أوجد القدرة اللحظية والقدرة المتوسطة . الجواب $125.0t^2$ (W) ، 167.0 (W) .

2-16 إذا دخل التيار فى دائرة ما من ناحية طرف التوصيل الموجب وكان الجهد على الدائرة هو 3.19V وإذا كانت القدرة المستهلكة هى 25 mW- . أوجد التيار . الجواب 6.4 mA- .

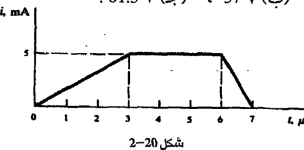
2-17 أوجد نـوع وقيمـة العنصر الموجـود فى الدائرة إذا كان التيار والجهـد فى الفترة $0 \geq 10^3t > \pi$ هما $i = 2.0 \sin 10^3t$ (mA) ، $\upsilon = 5.0 \cos 10^3t$ (mV) . الجـواب : ملف حثى قيمتـه 2.5 mH .

2-18 ملف حثه 4.0 mH على طرفيه جهداً قيمته $\upsilon = 2.0e^{-10^3t}$ (V) . أوجد القيمة العظمى للطاقة المختزنة علماً بأن التيار = صفراً عند $t = 0$. الجواب : 0.5 mW .

2-19 مكثف سعته 2.0 µF عليه شحنة ابتدائية Q_0 تم توصيله بمقاومة على التوالى قيمتها 10.0 Ω أوجد قيمة Q_0 إذا كانت الطاقة المستهلكة فى المقاومة 3.6 mJ . الجواب : 120.0 µC .

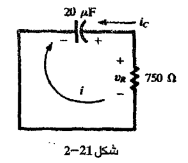
2-20 مكثف سعته C فاراد يمـر به تياراً $i = (V_m/R)e^{-t(R/C)}$ (A) ، اثبت أن الطاقـة العظمى المختزنـة هى $1/2\ CV_m^2$ افترض أن الشحنة الابتدائية صفر .

2-21 إذا كان تغير التيار مع الزمن بعد $t = 0$ هو كما فى شكل 2-20 . أوجد الجهد على طرفى العنصر عند $t = 6.5$ µs إذا كان العنصر (أ) 10 kΩ ، (ب) 15 mH ، (جـ) 0.3 nF باعتبار $Q(0) = 0$.
الجواب : (أ) 25 V ، (ب) -57 V ، (جـ) 81.3 V .



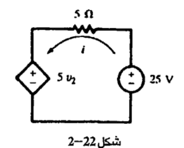
شكل 2-20

2-22 إذا كان الجهد على طرفى مكثف سعته 20.0-µF فى الفترة $t > 0$ هو $\upsilon = 100.0e^{-t/0.015}$ (V) كما فى شكل 2-2 أوجد دالة الطاقة التى تصاحب تفريغ المكثف . وقارن الطاقة الكلية بتلك المستهلكة فى مقاومة 750Ω . الجواب : $0.10\ (1 - e^{-t/0.0075})$ (J) .



شكل 2-21

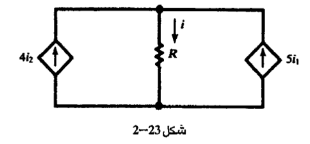
2-23 أوجد قيمة التيار فى الدائرة شكل 22-2 إذا كان جهد التحكم v_2 لمنبع الجهد التابع له القيم (أ) 4 V ، (ب) 5 V ، (جـ) 10 V . الجواب: (أ) 1 A ، (ب) 0 A ، (جـ) -5 A .



شكل 2-22

2-24 فى الدائـرة المبينـة فـى الـشكل 2-23 . أوجـد التـيـار i إذا كـان (أ) $i_1 = 2$ A ، $i_2 = 0$.
(ب) $i_1 = -1$ A ، $i_2 = 4$ A . (جـ) $i_1 = i_2 = 1$ A .

الجـواب: (أ) 10 A ، (ب) 11 A ، (جـ) 9 A .



شكل 2-23



الفصل الثالث

قوانيـــن الدائــرة

3.1 مقدمـــة

تتكون الدائرة الكهربية أوالشبكة الكهربية من عدد من عناصر الدائرة متصلة ببعضها كما ذكر فى الفصل الثانى. وتحتوى الدائرة عادة على منبع واحد على الأقل للجهد أو التيار. هذه التركيبة من العناصر ينشأ عنها مجموعة من الارتباطات بين الجهود والتيارات. هذه الارتباطات الجديدة والمعادلات المستنتجة منها بالإضافة إلى علاقات الجهد والتيار لكل عنصر على حدة تحقق حل الشبكة.

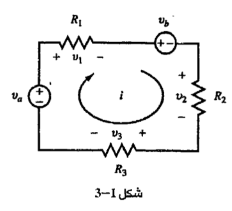
والسبب الكامن وراء تعريف كل عنصر على حدة وتوصيله بالشبكة وحل المعادلات هو فى تحليل أداء النبائط الكهربية مثل المحركات والمولدات والمحولات والملفات الكهربية بالإضافة إلى النبائط الإلكترونية. والحل غالباً هو فى الحصول على الإجابات للأسئلة الضرورية التى تفسر أداء النبيطة المستخدمة مع منبع الطاقة.

3.2 قانون كيرشوف للجهد

فى أى شبكة مغلقة ينص قانون كيرشوف للجهد (KVL) أن المجموع الجبرى للجهود يساوى صفراً. بعض هذه الجهود خاصة بالمنابع وبعضها الآخر ينشأ من مرور التيار فى العناصر غير الفعالة الذى يطلق عليه أحياناً بفقد الجهد. ويمكن تطبيق هذا القانون أيضاً للدوائر التى تستخدم منابع ثابتة، لتيار مستمر DC، ومنابع تتغير قيمتها مع الزمن $\upsilon(t)$ ، $i(t)$. ومع الدوائر التى تعمل مع منابع

سيجيء ذكرها فى الفصل التاسع . وطريقة تيار الشبيكة لتحليل الدائرة المذكورة فى بند 4-2 تعتمد على قانون كيرشوف للجهد .

مثـــال 1-3 : أكتب معادلة KVL للدائرة المبينة شكل 1-3 .



شكل 1−3

إذا بدأنا من الركن الأسفل على اليسار للدائرة وباعتبار اتجاه التيار كما هو مبين نحصل على :

$$-v_a + v_1 + v_b + v_2 + v_3 = 0$$

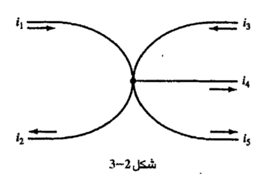
$$-v_a + iR_1 + v_b + iR_2 + iR_3 = 0$$

$$v_a - v_b = i\,(R_1 + R_2 + R_3)$$

3.3 قانون كيرشوف للتيار

عند توصيل عنصرين أو أكثر بنقطة ينشأ وصلة تعرف بالعقدة . والوصلة التى تصل عنصرين فقط تسمى عقدة بسيطة حيث لا يحدث تقسيم التيار . والوصلة التى تحتوى على ثلاث عناصر أو أكثر تعرف بالعقدة الرئيسية وهنا يحدث فعلاً تقسيم للتيار . ومنطوق قانون كيرشوف للتيار (KCL) يقرر أن المجموع الجبرى للتيارات عند أى عقدة يساوى صفراً . ويمكن كتابة القانون بطريقة أخرى بأن يكون مجموع التيارات الداخلة للعقدة تساوى مجموع التيارات الخارجة منها . وطريقة جهد العقدة التى استخدمت فى تحليل الشبكة فى بند 4-3 يقوم على كتابة معادلات عند العقد الرئيسية للشبكة باستخدام قانون كيرشوف للتيار وأساس هذا القانون يقوم على نظرية بقاء الشحنة .

مثـــال 2-3 : أكتب معادلة KCL للقوة المركبة المبينة شكل 2-3 .

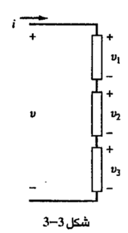


شكل 2–3

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$
$$i_1 + i_3 = i_2 + i_4 + i_5$$

3.4 توصيل عناصر الدائرة على التوالى

ثلاث عناصر غير فعالة للدائرة متصلة على التوالى كما فى شكل 3-3 يمر بها حينئذ التيار i وتكون الجهود على طرفيها هى $\upsilon1$ ، $\upsilon2$ ، $\upsilon3$ والجهد الكلى υ هو مجموع الجهود الثلاث $\upsilon = \upsilon1 + \upsilon2 + \upsilon3$.



شكل 3–3

إذا كانت هذه العناصر مقاومات فإن :

$$\begin{aligned} \upsilon &= iR_1 + iR_2 + iR_3 \\ &= i(R_1 + R_2 + R_3) \\ &= iR_{eq} \end{aligned}$$

حيث تكون R_{eq} هى المقاومة المكافئة للثلاث مقاومات وتنشأ نفس العلاقة بين التيار i والجهد υ.

ولأى عدد من المقاومات نحصل على .... $R_{eq} = R_1 + R_2 +$.

وإذا كانت الثلاث عناصر غير الفعالة حثية فإن :

$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di}{dt}$$

$$= L_{eq} \frac{di}{dt}$$

وبتطبيق ذلك لأى عدد من الحث على التوالى نحصل على $L_{eq} = L_1 + L_2 + ...$.

وإذا كانت الثلاث عناصر فى الدائرة مكثفات وباعتبار الشحنات الابتدائية صفراً حيث يكون ثابت التكامل صفراً.

$$v = \frac{1}{C_1}\int i\,dt + \frac{1}{C_2}\int i\,dt + \frac{1}{C_3}\int i\,dt$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\int i\,dt$$

$$= \frac{1}{C_{eq}}\int i\,dt$$

والسعة المكافئة لمكثفات متعددة على التوالى هو $1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + ...$.

مثـــال 3-3 : إذا كانت المقاومة المكافئة لثلاث مقاومات على التوالى هى 750.0Ω . اثنين منها هما 40.0Ω ، $410.0\ \Omega$ فماذا يجب أن تكون قيمة المقاومة الثالثة .

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$750.0 = 40.0 + 410.0 + R_3 \qquad \text{and} \qquad R_3 = 300.0\ \Omega$$

مثـــال 3-4 : مكثفان $C_1 = 2.0\ \mu F$ ، $C_2 = 10.0\ \mu F$ ، متصلان على التوالى . أوجد السعة المكافئة . كرر الحل إذا كانت $C_2 = 10\ pF$.

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(2.0 \times 10^{-6})(10.0 \times 10^{-6})}{2.0 \times 10^{-6} + 10.0 \times 10^{-6}} = 1.67\ \mu F$$

إذا كان $C_2 = 10.0$ pF .

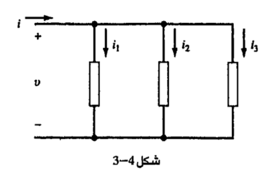
$$C_{eq} = \frac{(2.0\times10^{-6})(10.0\times10^{-12})}{2.0\times10^{-6}+10.0\times10^{-12}} = \frac{20.0\times10^{-18}}{2.0\times10^{-6}} = 10.0\,\text{pF}$$

حيث أعتبرت القيمة 10.0×10^{-12} للمجموع $C_1 + C_2$ فى المقام كمية صغيرة جداً ومهملة .

ملحوظـــة : حينما تختلف قيمتا مكثفان على التوالى بفرق كبير تكون فى الغالب السعة المكافئة لهما مساوية لأصغر المكثفان .

3.5 توصيل عناصر الدائرة على التوازى

عند توصيل ثلاث عناصر على التوازى كما فى الشكل 4-3 فإن قانون KCL يقرر أن التيار i الذى يدخل العقدة الرئيسية هو مجموع التيارات التى تخرج منها من خلال الأفرع الثلاثة .



شكل 4–3

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

إذا كانت الثلاث عناصر للدائرة مقاومات فإن :

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v = \frac{1}{R_{eq}} v$$

ولعدة مقاومات على التوازى يكون :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots$$

يلاحظ أن توصيل مقاومتين على التوازى يحدث كثيراً ولذا يجدر كتابة المقاومة المكافئة لهما وهى خارج قسمة حاصل ضربهما على حاصل جمعهما .

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

مثـــال 3-5 : أوجد المقاومة المكافئة لكل من : (أ) مقاومتان على التوازى كل منهما $60.0\ \Omega$ ، (ب) ثلاث مقاومات على التوازى كل منهما $60.0\ \Omega$.

(a) $$R_{eq} = \frac{(60.0)^2}{120.0} = 30.0\ \Omega$$

(b) $$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{60.0} + \frac{1}{60.0} + \frac{1}{60.0} \qquad R_{eq} = 20.0\ \Omega$$

ملحوظـــة : لعدد n من المقاومات المتساوية المتصلة على التوازى تكون المقاومة المكافئة لهم R/n .

وبالنسبة لمجموعة الحث على التوازى يكون لها نفس العلاقات الخاصة بالمقاومات على التوازى .

وبالنسبة لحثين على التوازى يكون

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots \qquad \text{and, for two inductances,} \qquad L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

مثـــال 3-6 : حثان متصلان على التوازى $L_1 = 30$ mH ، $L_2 = 6.0$ mH أوجد L_{eq} .

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{3.0\ \text{mH}} + \frac{1}{6.0\ \text{mH}} \qquad \text{and} \qquad L_{eq} = 2.0\ \text{mH}$$

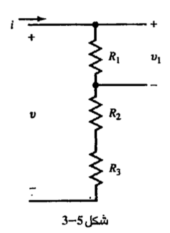
وعند استخدام ثلاث مكثفات على التوازى يكون :

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{dv}{dt} = C_{eq} \frac{dv}{dt}$$

وبتوصيل عدة مكثفات على التوازى فإن ... + $C_{eq} = C_1 + C_2$ التى يكون لها نفس الشبه مع توصيل مقاومات على التوالى .

3.6 تقسيم الجهد

إذا تم توصيل مجموعة من المقاومات على التوالى كما فى شكل 5-3 فإنه يطلق عليها مجزئ الجهد ويمكن تطبيق نفس المفهوم باستخدام معاوقات على التوالى كما سنبينه فى الفصل التاسع .



شكل 5–3

حيث $v_1 = iR_1$ ، $v = i(R_1 + R_2 + R_3)$

$$v_1 = v\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}\right)$$

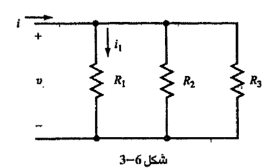
مثـــــال 7-3 : مجزئ للجهد مكون من مقاومتين مصمم على أساس أن المقاومة الكلية للمقاومتين تساوى $50.0\ \Omega$. فإذا كان جهد المخرج 10% من جهد الدخل . أوجد قيمة كلا من المقاومتين .

$$\frac{v_1}{v} = 0.10 \qquad 0.10 = \frac{R_1}{50.0 \times 10^3}$$

from which R1 = 5.0 Ω and R2 = 45.0 Ω .

3.7 تقسيـــم التيـــار

ينتج عن توصيل عدة مقاومات على التوازى مجزئ التيار كما فى شكل 3-6 وقيمة التيار الفرع i_1 بالنسبة للتيار الكلى i يبين وظيفة المجزئ ،



شكل 3–6

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} \qquad \text{and} \qquad i_1 = \frac{v}{R_1}$$

$$\frac{i_1}{i} = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = \frac{R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

ولمجزئ التيار ذو الفرعين نحصل :

$$\frac{i_1}{i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

يمكن التعبير عن ذلك كما يلى : نسبة التيار فى أحد الأفرع لدائرة تحتوى على فرعين على التوازى إلى التيار الكلى للدائرة يساوى نسبة مقاومة الفرع الآخر إلى مجموع مقاومتى الفرعين .

مثـــال 3-8 : المطلوب تقسيم تيار قيمته 30.0 mA إلى فرعين أحدهما 20.0 mA والآخر 10.0 mA بواسطة مجزئ تيار مقاومته المكافئة أكبر من أو تساوى من 10.0 Ω . أوجد فرعى المقاومتان .

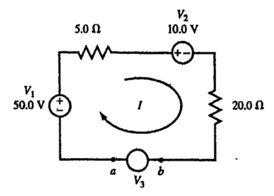
$$\frac{20\,\text{mA}}{30\,\text{mA}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad \frac{10\,\text{mA}}{30\,\text{mA}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \geq 10.0\,\Omega$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على :

$$R_1 \geq 15.0\,\Omega \;\text{،}\; R_2 \geq 30.0\,\Omega$$

مسائل محلولة

3-1 أوجد قيمة V_3 وقطبيها إذا كان التيار I فى الدائرة المبينة شكل 7-3 هو 40.0 A .



شكل 7-3

باعتبار أن V_3 لها نفس قطبية V_1 وبتطبيق KVL مبتدأ بالركن الأسفل يسار فإن :

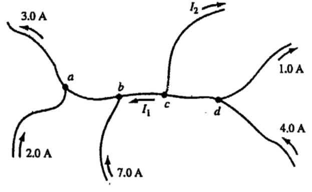
$$V_1 - I\,(5.0) - V_2 - I\,(20.0) + V_3 = 0$$

$$50.0 - 2.0 - 10.0 - 8.0 + V_3 = 0$$

$$V_3 = -30.0 \text{ V}$$

الطرف b يكون موجباً بالنسبة للطرف a .

3-2 أوجد التيارات I_1 ، I_2 للشبكة المبينة شكل 8-3 .



شكل 8-3

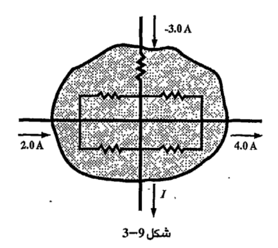
النقطتان a ، b يكونان عقدة واحدة وبتطبيق KCL .

$2.0 + 7.0 + I_1 = 3.0 \quad \text{or } I_1 = -6.0 \text{ A}$

وأيضاً النقطتان c، d تكونان عقدة واحدة وبذلك .

$4.0 + 6.0 + I_2 = 1.0 \quad \text{or } I_2 = \;\; 9.0 \text{ A}$

3-3 أوجد التيار I فى الدائرة المبينة شكل 9-3 .

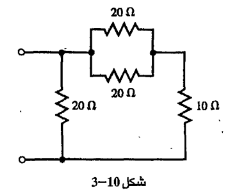


شكل 9–3

تيارات الأفرع الموجودة فى الجزء المظلل من الشكل لا يمكن معرفتها نظراً لعدم وجود قيم للمقاومات ومع ذلك عند تطبيق KCL بأعتبار المجموعة عقدة واحدة فإن :

$$2.0 - 3.0 - 4.0 - I = 0 \quad \text{or} \quad I = -5.0 \text{ A}$$

4-3 أوجد المقاومة المكافئة للدائرة المبينة شكل 10-3 .



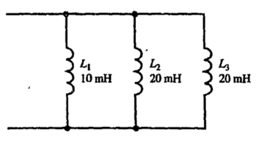
شكل 10–3

مقاومتان 20 Ω المتصلتان على التوازى : المقاومة المكافئة لهما هى :

$$R_{eq} = [(20)\,(20) / (20 + 20) = 10\ \Omega$$

وهذه المقاومة تكون على التوالى مع المقاومة 10 Ω ويكون المجموع 20 Ω . وهذا بدوره يكون على التوازى مع مقاومة أخرى قيمتها 20 Ω وبذلك يكون المقاومة المكافئة الكلية هى 10 Ω .

3-5 أوجد الحث المكافئ لثلاث عناصر حثية على التوازى كما فى شكل 11-3 .

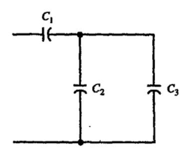


شكل 11–3

الحثان 20 mH لهما حث مكافئ قيمته 10 mH وهذه الأخيرة تكون على التوازى مع الحث 10 mH وبذلك يكون الحث المكافئ الكلى 5 mH أو تستخدم العلاقة التالية :

$$\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}=\frac{1}{10\,\text{mH}}+\frac{1}{20\,\text{mH}}+\frac{1}{20\,\text{mH}}=\frac{4}{20\,\text{mH}} \qquad \text{or} \qquad L_{eq}=5\,\text{mH}$$

3-6 أوجد قيمة السعة الكلية للثلاث مكثفات المبينة فى شكل 12-3 .



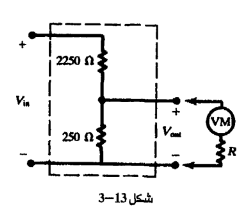
شكل 12–3

للمكثفين C_2 ، C_3 على التوازى $C_{eq} = C_2 + C_3$ وبذلك تكون C_1 ، C_{eq} على التوالى .

$$C_T=\frac{C_1C_{eq}}{C_1+C_{eq}}=\frac{C_1(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3}$$

3-7 الدائرة المبينة فى شكل 13-3 هى مجزئ للجهد ويطلق عليها أيضاً مضعف . وحينما تكون مقاومة واحدة ذو طرف ضبط متحرك تسمى مقياس الجهد ولاكتشاف تأثير التحميل الناجم من المقاومة R على الفلولتمتر VM تحسب نسبة V_{out}/V_{in} فى الحالات (أ) $R = \infty$ ، (ب) 1MΩ ، (جـ) 10 kΩ (د) 1 kΩ .

(a) $$V_{out}/V_{in}=\frac{250}{2250+250}=0.100$$



شكل 13–3

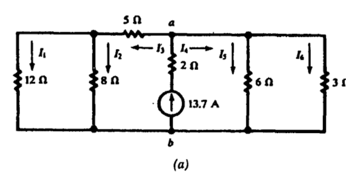
(b) المقاومة المكافئة للمقاومتين R، 250 Ω هى :

$$R_{eq} = \frac{250(10^6)}{250+10^6} = 249.9\ \Omega \qquad \text{and} \qquad V_{out}/V_{in} = \frac{249.9}{2250+249.9} = 0.100$$

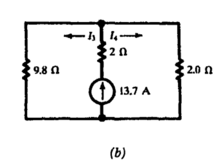
(c)
$$R_{eq} = \frac{(250)(10\,000)}{250+10\,000} = 243.9\ \Omega \qquad \text{and} \qquad V_{out}/V_{in} = 0.098$$

(d)
$$R_{eq} = \frac{(250)(1000)}{250+1000} = 200.0\ \Omega \qquad \text{and} \qquad V_{out}/V_{in} = 0.082$$

3-8 أوجد تيارات جميع الأفرع للشبكة المبينة فى شكل (a) 14-3 .



(a)



(b)

شكل 14–3

المقاومات المكافئة على يمين ويسار العقدتين a ، b هى :

$$R_{eq(left)} = 5 + \frac{(12)(8)}{20} = 9.8\ \Omega$$

$$R_{eq(right)} = \frac{(6)(3)}{9} = 2.0\ \Omega$$

والآن بالرجوع إلى الشبكة المبسطة شكل (b) 14-3 فإن :

$$I_3 = \frac{2.0}{11.8}(13.7) = 2.32\ \text{A}$$

$$I_4 = \frac{9.8}{11.8}(13.7) = 11.38\ \text{A}$$

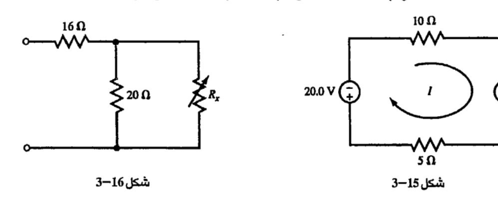
وبالرجوع إلى الشبكة الأصلية فإن :

$$I_1 = \frac{8}{20}(2.32) = 0.93\text{ A} \qquad I_2 = 2.32 - 0.93 = 1.39\text{ A}$$

$$I_5 = \frac{3}{9}(11.38) = 3.79\text{ A} \qquad I_6 = 11.38 - 3.79 = 7.59\text{ A}$$

مسائل إضافية

3-9 أوجد قيمة جهد وقطبية المنبع V فى الدائرة المبينة فى شكل 3-15 إذا كان (أ) I = 2 A ، (ب) I = -2(A). الجواب: (أ) 50 V موجب b ، (ب) 10 V (موجب a) .

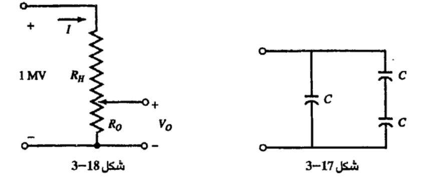


شكل 3-16 شكل 3-15

3-10 أوجد R_{eq} للدائرة المبينة فى شكل 3-16 للقيم (أ) $R_x = \infty$ ، (ب) $R_x = 0$ ، (جـ) $R_x = 5\ \Omega$.
الجواب: (أ) 36 Ω ، (ب) 16 Ω ، (جـ) 20 Ω .

3-11 حث قيمته 8 mH متصل على التوالى مع حثين على التوازى أحدهما 3 mH والآخر 6 mH أوجد L_{eq} . الجواب 10.0 mH .

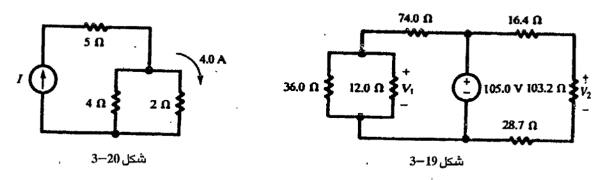
3-12 أثبت أن الثلاث مكثفات ذات القيم المتساوية C المبينة فى شكل 3-17 لهم القيمة المكافئة $C_{eq} = 1.5\ C$.



شكل 3-18 شكل 3-17

3-13 أوجد R_H ، R_O لمجزئ الجهد المبين فى شكل 18-3 بحيث يكون التيار I فى حدود 0.5 A حينما تكون $V_O = 100$ V . الجواب : $R_H = 2$ MΩ ، $R_O = 200$ Ω.

3-14 باستخدام تقسيم الجهد أحسب كل من V_1 ، V_2 فى الشبكة المبينة فى شكل 19-3 . الجواب : 11.4 V ، 73.1 V.



شكل 20–3

شكل 19–3

3-15 أوجد تيار المنبع I والقدرة الكلية المعطاة للدائرة المبينة فى شكل 20-3 . الجواب : 6.0 A ، 228 W.

3-16 اثبت أن لأربع مقاومات متصلة على التوازى يكون التيار فى أحد الأفرع وليكن فرع R_4 بالنسبة للتيار الكلى حسب العلاقة .

$$I_4 = I_T\left(\frac{R'}{R_4 + R'}\right) \quad \text{where } R' = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

ملحوظـــة : هذه الحالة مشابهة لما سبق فى حالة فرعين على التوازى حيث نستبدل المقاومة الأخرى بالمقاومة R'.

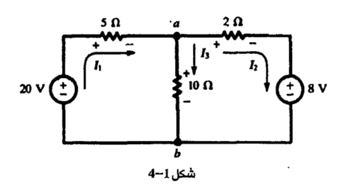
الفصل الرابع

طرق التحليل

4.1 طريقة تيار الفرع

فى هذه الطريقة نفرض تياراً لكل فرع فى الشبكة الفعالة ثم يطبق قانون كيرشوف للتيار عند العقد الرئيسية وتحدد الجهود بين العقد بدلالة التيارات وينتج عن ذلك مجموعة من المعادلات الآنية يمكن حلها للحصول على قيم التيارات.

مثال 4-1: باستخدام طريقة تيار الفرع أوجد التيار فى كل فرع فى الشبكة المبينة شكل 4-1.



شكل 4-1

نفترض التيارات I_1، I_2، I_3 للأفرع المبينة فى الشكل وبتطبيق KCL عند العقدة (a) ينتج :

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (1)$$

ويمكن كتابة الجهد V_{ab} بدلالة العناصر الموجودة فى كل فرع $V_{ab} = 20 - I_1 (5)$، $V_{ab} = I_3 (10)$، $V_{ab} = I_2 (2) + 8$. وبذلك يمكن كتابة المعادلتين التاليتين :

$$20 - I_1(5) = I_3(10) \qquad (2)$$

$$20 - I_1(5) = I_2(2) + 8 \qquad (3)$$

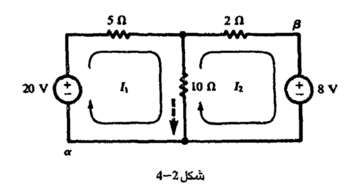
بحل الثلاث معادلات (1)، (2)، (3) أيضاً نحصل على $I_1 = 2\ A$ ، $I_2 = 1\ A$ ، $I_3 = 1\ A$.

يمكن فرض إتجاهات أخرى لتيارات الأفرع حيث سيشتمل الحل على الإشارة المناسبة . فى الشبكات الأكثر تعقيداً يصعب تطبيق طريقة تيارات الأفرع لأنه من الصعب تحديد نقطة البداية والعدد اللازم من المعادلات . أيضاً المعادلات الناتجة فى هذه الطريقة تكون أكثر استقلالية عن طريقة تيار الشبيكة أو طريقة جهد العقدة .

4.2 طريقة تيار الشبيكة (الحلقة)

فى هذه الطريقة تقسم الشبكة إلى دوائر مغلقة (حلقات) ويفترض لكل من هذه الدوائر . ويطلق على هذا التيار أحياناً بالتيار الحلقى وبذلك يكون لكل عنصر وفرع تيار مستقل بذاته . وحينما يمر فى أحد أفرع الشبيكة تياران فإن التيار الحقيقى المار به هو المجموع الجبرى لهما . ويمكن افتراض إتجاه موحد للتيار الحلقى إما فى إتجاه عقارب الساعة أو عكس هذا الإتجاه . وبمجرد تحديد إتجاه التيارات نستخدم قانون كيرشوف للجهد لكل حلقة للحصول على المعادلات الآنية اللازمة .

مثـــال 4-2: أوجد التيار فى كل فرع فى الشبكة المبينة شكل 4-2 (وهى نفس شكل 4-1 باستخدام طريقة تيار الشبيكة .



شكل 2–4

تختار التيارين I_1 ، I_2 كما هو مبين بالشكل وبتطبيق KVL حول الحلقة اليسار مبتدئاً بالنقطة α .

$$-20 + 5I_1 + 10(I_1 - I_2) = 0$$

وبالمرور حول الحلقة اليمنى مبتدئاً بالنقطة β فإن :

$$8 + 10(I_2 - I_1) + 2I_2 = 0$$

وبترتيب الحدود :

$$15I_1 - 10I_2 = 20$$
$$-10I_1 + 12I_2 = -8$$

وبحل (4)، (5) أيضاً ينتج $I_1 = 2$ A ، $I_2 = 1$ A ويكون التيار فى الفرع الأوسط المبين بالسهم المنقط $I_1 - I_2 = 1$ A . وفى مثال 1-4 كان ذلك هو تيار الفرع I_3.

وبالرغم من أننا نحدد تياراً لكل حلقة، إلا أنه لا يقتصر على الحلقات فقط حتى يمكن الحصول على مجموعة المعادلات اللازمة. وعلى سبيل المثال انظر مسألة 4-6 حيث تمر جميع التيارات بالمنبع وتسمى تيارات حلقية والقاعدة المتبعة هى أن كل عنصر في الشبكة يكون له تيار أو أكثر ولا يمكن أن يكون لأى عنصرين فى فرعين مختلفين نفس التيار أو نفس مجموعة التيارات.

4.3 المصفوفات والمحددات

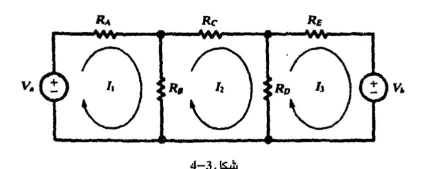
المعادلات الآنية التى عددها n لشبكة تحتوى على n شبيكة يمكن كتابتها على شكل مصفوفة (راجع الملحق B الخاص بالمقدمة عن المصفوفات والمحددات).

مثـــــال 3-4: بتطبيق KVL للشبكة ذات الثلاث شبيكات المثبتة فى شكل 3-4 يمكن الحصول على الثلاث معادلات التالية :

$$\begin{aligned} (R_A + R_B)I_1 \quad - R_BI_2 \quad &= V_a \\ -R_BI_1 + (R_B + R_C + R_D)I_2 \quad - R_DI_3 &= 0 \\ -R_DI_2 + (R_D + R_E)I_3 &= -V_b \end{aligned}$$

وبوضع هذه المعادلات على شكل مصفوفة :

$$\begin{bmatrix} R_A + R_B & -R_B & 0 \\ -R_B & R_B + R_C + R_D & -R_D \\ 0 & -R_D & R_D + R_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ -V_b \end{bmatrix}$$



شكل 3-4

يمكن كتابة الشكل العام للمصفوفات بعناصر الدائرة كما يلى :

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

حيث يكون العنصر R_{11} (صف 1 عمود 1) هو مجموع جميع المقاومات التى يمر بها تيار الشبيكة (الحلقة) I_1 وبذلك تكون هى $R_A + R_B$ فى شكل 3-4 وبالمثل يكون العنصران R_{22} ، R_{33} هى مجموع المقاومات التى يمر بها كل من I_2 ، I_3 على التوالى .

العنصر R_{12} (صف 1 عمود 2) هى مجموع المقاومات التى يمر بها التياران I_1 ، I_2 وتكون إشارة R_{12} موجبة (+) إذا كان كلا التيارات فى نفس الإتجاه لكل مقاومة وسالبة (–) إذا كانا فى إتجاهين متضادين. فى شكل 3-4 نجد أن R_B هى المقاومة الوحيدة المشتركة مع I_1 ، I_2 وإتجاهات التيارات بها متضاد حيث تكون الإشارة سالبة وبالمثل تكون العناصر R_{21} ، R_{23} ، R_{13} ، R_{31} هى مجموع المقاومات المشتركة مع تيارى الحلقة حسب رمز التيار كما سبق بيانه بالنسبة للمقاومة R_{12} وإذا كان ترميز المقاومات بالرمزين i ، j فإن $R_{ij} = R_{ji}$ وبذلك تكون المصفوفة متناظرة بالنسبة لقطرها الرئيسى .

ولا يحتاج التيار لتوضيح حيث أن عناصره فى عمود واحد ولكل تيار رمز خاص به 1 ، 2، 3، . . . وهذه التيارات هى المجاهيل فى طريقة التيار الحلقى عند تحليل الشكبة .

ويعتبر الجهد V_1 هو مجموع جهود المنابع الخاصة بالتيار الحلقى I_1 ويحسب الجهد موجباً إذا مر التيار I_1 من الطرف السالب (–) إلى الطرف الموجب (+) وإلا يعتبر الجهد سالباً وبعبارة أخرى يكون الجهد موجباً إذا كان المنبع فى إتجاه التيار الحلقى. ففى شكل 3-4 تكون الحلقة ذات جهد منبع V_a يدفع التيار فى إتجاه I_1 والحلقة 2 ليس لها منبع والحلقة 3 لها المنبع V_b الذى يدفع التيار I_3 فى الإتجاه المضاد وبذلك تكون V_3 سالبة .

ويمكن حل المصفوفة المستنتجة من طريقة التيار الحلقى بعدة طرق . وإحدى هذه الطرق باستخدام المحددات (طريقة كرامر) التى ستستخدم هنا ونلاحظ أن الطرق الأخرى تكون أكثر ملاءمة فى الشبكات الكبيرة .

مثـــال 4-4 : حل المصفوفة فى المعادلة (6) باستخدام طريقة المحددات .

نحصل على التيار المجهول I_1 كنسبة بين محددين . ويكون محدد المقام له عناصر مصفوفة المقاومات وهو ما يطلق عليه محدد المعاملات ويرمز له بالرمز Δ_R . ومحدد البسط له نفس العناصر Δ_R فيما عدا العمود الأول حيث يكتب فيه الجهود الموجودة فى مصفوفة الجهد وبذلك :

$$I_1 = \begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

وبالمثل :

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & V_1 & R_{13} \\ R_{21} & V_2 & R_{23} \\ R_{31} & V_3 & R_{33} \end{vmatrix} \qquad I_3 = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & V_1 \\ R_{21} & R_{22} & V_2 \\ R_{31} & R_{32} & V_3 \end{vmatrix}$$

ويمكن فك محددات البسط إلى محددات أصغر تساعد فى فهم وحل الشبكة وذلك باستخدام قيم العمود المحتوى على الجهد مع محددات المقاومات .

$$I_1 = V_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R}\right) + V_2\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_R}\right) + V_3\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_R}\right) \qquad (7)$$

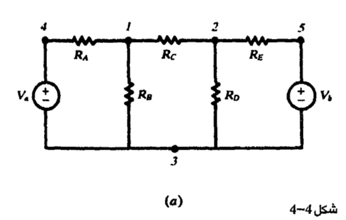
$$I_2 = V_1\left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_R}\right) + V_2\left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_R}\right) + V_3\left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_R}\right) \qquad (8)$$

$$I_3 = V_1\left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_R}\right) + V_2\left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_R}\right) + V_3\left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_R}\right) \qquad (9)$$

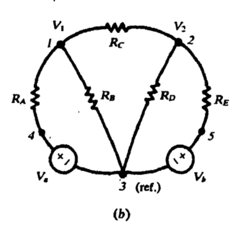
حيث Δ_{ij} تحل محل المحدد الأصغر للبسط R_{ij} (العنصر للصف i والعمود j) فى Δ_R .
ويجب الانتباه لإشارات المحددات الصغيرة - انظر الملحق B- .

4.4 طريقة جهد العقدة

تحتوى الشبكة شكل 4-4(a) على خمس عقد حيث تكون العقدتان 4، 5 بسيطة والعقد 1، 2، 3 رئيسية وفى طريقة جهد العقدة نختار أحد العقد الرئيسية وتسمى عقدة المقارنة وتكتب معادلات KCL للعقد الرئيسية الأخرى ثم نفترض جهداً لكل من العقد الرئيسية الأخرى التى يمكن حل معادلاتها للحصول على قيمهم. (لاحظ أن الجهد المفترض يكون منسوباً لجهد عقدة المقارنة).



(a)



(b)

شكل 4-4

وترسم الشبكة مرة أخرى كما فى شكل 4-4(b) وباعتبار العقدة 3 هى الرئيسية (عقدة المقارنة) بالنسبة للجهدين V_1 ، V_2 وبتطبيق KCL حيث يكون مجموع التيارات عند العقدة 1 صفراً فإن :

$$\frac{V_1 - V_a}{R_A} + \frac{V_1}{R_B} + \frac{V_1 - V_2}{R_C} = 0$$

وبالمثل عند العقدة 2 فإن :

$$\frac{V_2 - V_1}{R_C} + \frac{V_2}{R_D} + \frac{V_2 - V_b}{R_E} = 0$$

(استخدم قانون KCL لا يعنى بالضرورة أن جميع التيارات لأى عقدة متجهة إلى الخارج ففى الحقيقة يكون التيار فى الفرع 1-2 متجهاً إلى الخارج من أحد العقد وللداخل لعقدة أخرى). وبوضع معادلتى الجهد V_1 ، V_2 فى صورة مصفوفة.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} & -\frac{1}{R_C} \\ -\frac{1}{R_C} & \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a/R_A \\ V_b/R_E \end{bmatrix}$$

لاحظ التشابه فى حدود المصفوفة فالعنصر 1 ، 1 يحتوى على مجموع مقلوبات جميع المقاومات المتصلة بالعقدة 1 العنصر 2 ، 2 يحتوى على مجموع المقاومات المتصلة بالعقدة 2 . ويكون كلا من العنصرين 1 ، 2 و 2 ، 1 محتوياً على سالب جمع مقلوبات المقاومات لجميع الأفرع التى تصل العقدة 1 بالعقدة 2 (يوجد فرع واحد بين العقدتين فى هذه الحالة) .

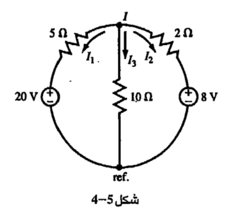
تحتوى مصفوفة التيار التى على الجانب الأيمن على V_a/R_A و V_b/R_B وهما يسميان تيارى الدفع . وكلاهما موجب لأنهما ويدفعان التيار إلى داخل العقدة . وسنتناول بالتفصيل دراسة عناصر المصفوفة باستخدام معادلات جهد العقدة فى الفصل التاسع حيث نتعامل مع الشبكات باستخدام الموجات الجيبية المستقرة .

مثـــال 5-4: حل الدائرة التى فى مثال 2-4 باستخدام طريقة جهد العقدة .

يعاد رسم الدائرة مرة ثانية لتكون كما فى شكل 5-4 . ولوجود عقدتين رئيسيتين فقط فإن معادلة واحدة تكفى . وباعتبار أن التيارات جميعها متجهة إلى الخارج من العقدة العليا وأن العقدة السفلى هى عقدة المقارنة .

$$\frac{V_1 - 20}{5} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - 8}{2} = 0$$

ومنها $V_1 = 10\ V$ ومن ثم $I_1 = (10 - 20) / 5 = -2\ A$ (الإشارة السالبة تعنى أن التيار I_1 يمر إلى داخل العقدة 1) ، $I_2 = (10 - 8) / 2 = 1\ A$ ، $I_3 = 10/10 = 1\ A$ التيار I_3 فى مثال 2-4 موضح بسهم منقط .



شكل 5-4

4.5 المقاومة الداخلة

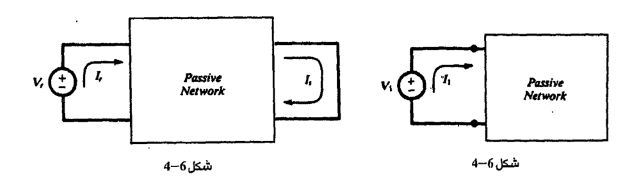
فى الشبكات ذات المنبع الواحد تكون المقاومة الداخلة ذات أهمية خاصة. مثل هذه الشبكة موضحة بشكل 4-6 حيث يكون الجهد المؤثر معرفاً بالجهد V_1 والتيار المناظر I_1. وحيث أن المنبع الوحيد الموجود هو V_1 فإن معادلة I_1 تكون (انظر معادلة رقم 7 من المثال 4-4).

$$I_1 = V_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R}\right)$$

وتكون المقاومة الداخلة هى النسبة بين V_1 إلى I_1.

$$R_{\text{input},1} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}}$$

ويجب أن يتحقق القارئ أن Δ_R/Δ_{11} ذات وحدات مقاومة Ω.



شكل 4-6 شكل 4-6

4.6 مقاومة الانتقال

ينتج عن الجهد المؤثر فى أحد أجزاء الشبكة تيارات فى جميع أفرع الشبكة. وكمثال فإن وجود منبع متصلاً بشبكة غير فعالة ينتج عنه تياراً فى ذلك الجزء من الشبكة عندما يتم توصيله بمقاومة حمل. وفى هذه الحالة يكون للشبكة مقاومة انتقال كلية. وباعتبار الشبكة غير الفعالة المفترضة بشكل 4-7 حيث أن جهد المنبع V_r وتيار الخرج I_s. فإن معادلة تيار الشبيكة للتيار I_s تحتوى فقط على حد واحد هو الناتج من الجهد V_r فى بسط المحدد.

$$I_s = (0)\left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_R}\right) + \cdots + 0 + V_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_R}\right) + 0 + \cdots$$

وتكون مقاومة الانتقال للشبكة هى نسبة V_r إلى I_s .

$$R_{transfer,rs} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{rs}}$$

ولأن مصفوفة المقاومات متماثلة فإن $\Delta_{rs} = \Delta_{sr}$ وتكون بذلك مقاومة الانتقال :

$$R_{transfer,rs} = R_{transfer,sr}$$

وهذا يمثل حقيقة هامة فى الشبكات الخطية : إذا نتج تيار معين فى شبيكة s نتيجة لجهد معين فى الشبيكة r فإن نفس الجهد فى الشبيكة s ينشأ عنه نفس التيار فى الشبيكة r .

وإذا أخذنا الحالة العامة لعدد n من الشبيكات لشبكة تحتوى على عدد من جهود المنابع فإن التيار للحلقة التى رقمها k يمكن كتابتها بدلالة المقاومة الداخلة ومقاومة الانتقال (راجع المعادلات (7)، (8)، (9) للمثال 4-4).

$$I_k = \frac{V_1}{R_{transfer,1k}} + \cdots + \frac{V_{k-1}}{R_{transfer,(k-1)k}} + \frac{V_k}{R_{input,k}} + \frac{V_{k+1}}{R_{transfer,(k+1)k}} + \cdots + \frac{V_n}{R_{transfer,nk}}$$

وفى الحقيقة لا يوجد هنا جديد من الناحية الرياضية ولكن معادلة التيار فى هذا الشكل يوضح تماماً أن التيار يتكون من تجميع عدة تيارات ومبيناً كيف تتحكم المقاومات فى تأثير الجهد على قيمة التيار فى شبيكة معينة. وعند فصل أحد المنابع البعيدة عن الشبيكة k سيؤدي إلى مقاومة انتقال كبيرة فى هذه الحلقة وبذلك يكون التأثير صغير جداً على التيار I_k . ويكون جهد المنبع V_k والجهود الأخرى فى الشبيكات المجاورة للشبيكة k يمثل جزءً كبيراً للتيار I_k .

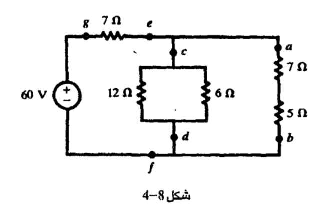
4.7 تبسيط الشبكات

بالرغم من أن الطرق الرئيسية فى تحليل الدوائر هى تيار الشبيكة وجهد العقدة. فإن المقاومة المكافئة للأفرع المتوالية أو المتوازية (بند 4-3 ، 5-3) مع قوانين تقسيم الجهد والتيار توفر وسيلة أخرى لتحليل الشبكات. وهذه الطريقة شاقة وتستلزم عادةً رسم عديد من الدوائر الإضافية ومع هذا فإن عملية تبسيط الشبكة يحقق صورة واضحة للعلاقات الخاصة بالجهد والتيار والقدرة للشبكة. وتبدأ عملية التبسيط بنظرة شاملة على الشبكة لإلتقاط أى مجموعات من المقاومات على التوالى أو على التوازى.

مثـــال 4-6: أوجد القدرة المعطاة من منبع جهد 60 V وأوجد أيضاً القدرة المستهلكة فى كل مقاومة فى الشبكة المبينة فى شكل 4-8.

$$R_{ab} = 7 + 5 = 12\,\Omega$$

$$R_{cd} = \frac{(12)(6)}{12+6} = 4\,\Omega$$



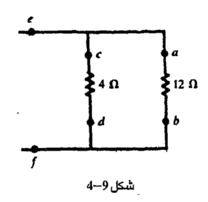
شكل 4–8

R_{cb} ، Rab على التوازى (شكل 4-9) ليعطى :

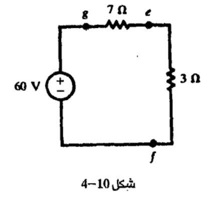
$$R_{cf} = \frac{(4)(12)}{4+12} = 3\,\Omega$$

وبذلك تكون المقاومة المكافئة Ω-3 على التوالى مع المقاومة Ω-7 (شكل 4-10) وعلى ذلك تكون المقاومة الكلية :

$$R_{eq} = 7 + 3 = 10\,\Omega$$



شكل 4–9



شكل 4–10

القدرة الكلية المستهلكة والتى تساوى القدرة الكلية المعطاة من المنبع يمكن حسابها الآن كما يلى :

$$P_T = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{(60)^2}{10} = 360\ \text{W}$$

وهذه القدرة تكون مقسمة بين R_{ge} ، R_{ef} كالتالى :

$$P_{ge} = P_{7\Omega} = \frac{7}{7+3}(360) = 252\ \text{W} \qquad P_{ef} = \frac{3}{7+3}(360) = 108\ \text{W}$$

والقدرة P_{ef} تنقسم بدورها بين R_{cd} ، R_{ab} كالتالى :

$$P_{cd} = \frac{12}{4+12}(108) = 81\ \text{W} \qquad P_{ab} = \frac{4}{4+12}(108) = 27\ \text{W}$$

وأخيراً فإن هذه القدرات تقسم بين كل مقاومة على حدة كالتالى :

$$P_{12\Omega} = \frac{6}{12+6}(81) = 27\ \text{W} \qquad P_{7\Omega} = \frac{7}{7+5}(27) = 15.75\ \text{W}$$

$$P_{6\Omega} = \frac{12}{12+6}(81) = 54\ \text{W} \qquad P_{5\Omega} = \frac{5}{7+5}(27) = 11.25\ \text{W}$$

4.8 التراكب (التجميع)

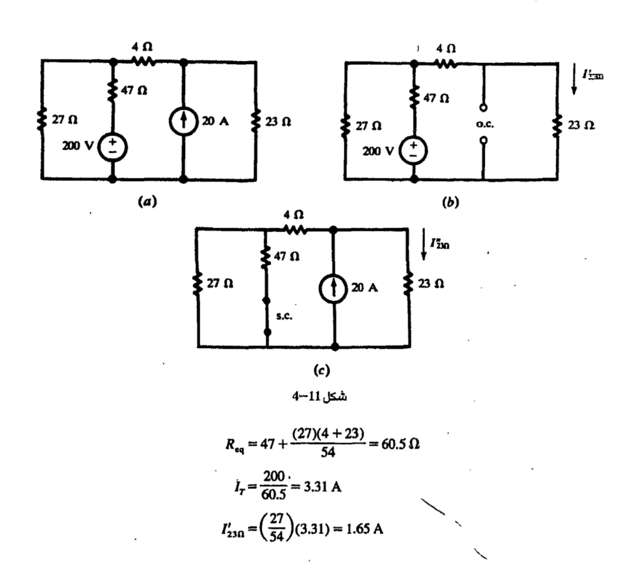
فى الشبكات التى تحتوى على اثنين أو أكثر من المنابع المطلقة يمكن تحليلها للحصول على الجهود المختلفة وتيارات الأفرع وذلك باستخدام منبع واحد فى كل مرة ثم عمل تراكب (تجميع) للنتائج . وتستخدم هذه الطريقة أساساً لوجود علاقة خطية بين الجهد والتيار . ومع وجود منابع تابعة يمكن استخدام طريقة التراكب فقط حينما تكون دوال التحكم خارجة عن الشبكة المحتوية على المنابع حتى لا تتغير المتحكمات عندما نستخدم منبعاً واحداً فى كل مرة . وتُقصر جميع منابع الجهد إلا واحداً فى حين تستبدل منابع التيار بدوائر مفتوحة . ولا يمكن استخدام طريقة التراكب لحساب القدرة لأن القدرة فى أى عنصر تكون متناسبة مع مربع التيار أو مربع الجهد الذى يكون حينئذ غير خطى .

ولتوضيح أكثر لطريقة التراكب ارجع إلى المعادلة رقم (7) مثال 4-4 .

$$I_1 = V_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R}\right) + V_2\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_R}\right) + V_3\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_R}\right)$$

والذى يحتوى على أساس نظرية التراكب. ولاحظ أن الثلاث حدود اليمنى هى المكونة للتيار I_1. فإذا وجد منابع فى الشبكات الثلاث فإن التيار I سيكون ناتجاً من مساهمة كل من وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت الشبيكة 3 تشمل المنبعين V_1، V_2 وكلا منهما يساوى صفراً فإن I_1 تحدد تماماً بالحد الثالث.

مثـــال 4-7: أحسب التيار فى المقاومة 23Ω المبينة شكل 4-11(a) باستخدام طريقة التراكب - ومع استخدام المنبع 200 V بمفرده يستبدل منبع التيار 20 A بدائرة مفتوحة كما فى شكل 4-11(b).



شكل 4-11

$$R_{eq} = 47 + \frac{(27)(4+23)}{54} = 60.5\ \Omega$$

$$I_T = \frac{200}{60.5} = 3.31\ \text{A}$$

$$I'_{23\Omega} = \left(\frac{27}{54}\right)(3.31) = 1.65\ \text{A}$$

حينما يعمل المنبع 20 A بمفرده فإن المنبع 200 V يستبدل بدائرة قصيرة كما فى شكل 4-11(c).

$$R_{eq} = 4 + \frac{(27)(47)}{74} = 21.15\ \Omega$$

Then

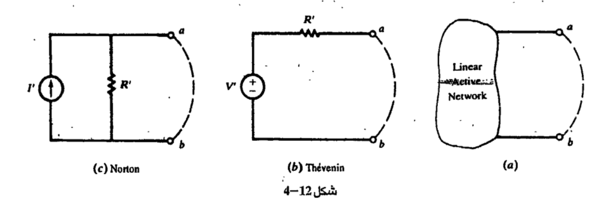
$$I''_{23\Omega} = \left(\frac{21.15}{21.15 + 23}\right)(20) = 9.58\ \text{A}$$

التيار الكلى فى المقاومة 23 Ω يكون :

$$I_{23\Omega} = I'_{23\Omega} + I''_{23\Omega} = 11.23\ \text{A}$$

4.9 نظريتى ثيفينن ونورتون

للشبكة الخطية ذات المقاومات والتى تحتوى على منبع أو أكثر للجهد والتيار يمكن استبدالها بمنبع واحد من الجهد ومقاومة على التوالى (نظرية ثيفينن) أو بمنبع واحد للتيار ومقاومة على التوازى (نظرية نورتون). ويسمى الجهد جهد ثيفينن المكافئ 'V والتيار بتيار نورتون المكافئ 'I. والمقاومتان لهما نفس الرمز 'R. حينما نفتح الطرفين ab فى شكل 4-12(a) فإنه سيظهر جهد بينهما.

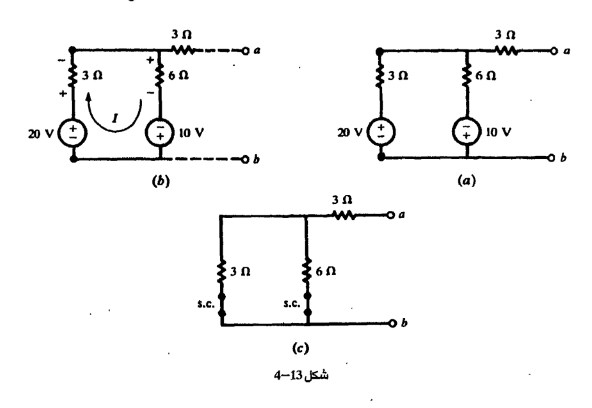


(c) Norton (b) Thévenin (a)

شكل 4-12

من شكل 4-12(b) من المؤكد أن 'V هو جهد ثيفينن لدائرة ثيفينن المكافئة. وإذا قصرنا طرفى الدائرة كما هو مبين بالخط المنقوط فى شكل 4-12(a) فإنه سينشأ تيار. من شكل 4-12(c) من المؤكد أن التيار 'I هو تيار نورتون لدائرة نورتون المكافئة. والآن إذا كان كل من الدائرتان (b)، (c) مكافئ لنفس الشبكة الفعالة فسيكون كل منهم مكافئ للآخر. ويمكن استنتاج أن I' = V'/R' وإذا أُستنتجا كل من 'V ، 'I من الشبكة الفعالة فإن R' = V'/I'.

مثـــال 4-8: أوجد دائرتى ثفنين ونورتون المكافئتين للشبكة الفعالة المبينة شكل (a)4-13 .



شكل 13–4

عند فتح الطرفين ab يدفع المنبعان تياراً فى إتجاه عقارب الساعة خلال المقاومتين 3Ω ، 6Ω كما فى شكل (b)4-13 .

$$I=\frac{20+10}{3+6}=\frac{30}{9}\text{ A}$$

وحيث أنه لا يمر تيار فى المقاومة العليا التى على اليمين 3-Ω فإن جهد ثيفنن يمكن أن يؤخذ من أى فرع .

$$V_{ab}=V'=20-\left(\frac{30}{9}\right)(3)=10\text{ V}$$

or $$V_{ab}=V'=\left(\frac{30}{9}\right)6-10=10\text{ V}$$

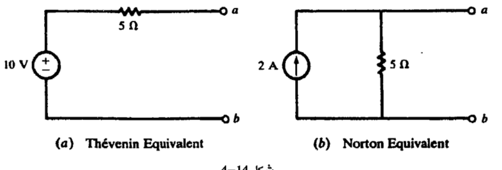
ويمكن الحصول على قيمة R' بقصر ينابع الجهد (شكل (c)4-13) وإيجاد المقاومة المكافئة للشبكة عند الطرفين ab .

$$R'=3+\frac{(3)(6)}{9}=5\,\Omega$$

وعند عمل قصر على الطرفين ينتج التيار $I_{s.c.}$ من المنبعين وبفرض أنه يمر من a إلى b فإنه ينشأ بنظرية التراكب .

$$I_{s.c.} = I' = \left(\frac{6}{6+3}\right)\left[\frac{20}{3+\frac{(3)(6)}{9}}\right] - \left(\frac{3}{3+3}\right)\left[\frac{10}{6+\frac{(3)(3)}{6}}\right] = 2\text{ A}$$

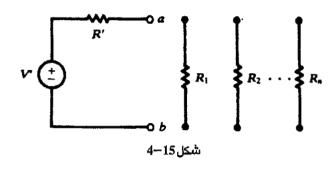
ويبين شكل 14-4 الدائرتين المكافئتين وفى حالتنا هذه تم الحصول على 'V' ، I' ، R كل على حدة حيث أن كل منهم مرتبط بالآخر بقانون أوم فإنه يمكن استخدام أى قيمتين للحصول على القيمة الثالثة .



(a) Thévenin Equivalent (b) Norton Equivalent

شكل 14–4

وتبدو فائدة دوائر ثفينين ونورتون المكافئة حينما تختبر الشبكة الفعالة باستخدام عدة أحمال كل منها يمكن تمثيله بمقاومة وشكل 15-4 يبين ذلك حيث من المؤكد أن المقاومات $R_1, R_2, \dots R_n$ يمكن توصيل كل منها على حده فى كل مرة وبذلك يمكن الحصول على التيار والقدرة بسهولة . أما إذا حاولنا عمل ذلك فى الدائرة الأصلية ، على سبيل المثال ، باستخدام تبسيط الشبكة فإن الحل يكون مطولاً وصعباً ويستغرق وقتاً طويلاً .



شكل 15–4

4.10 نظرية القدرة القصوى المنقولة

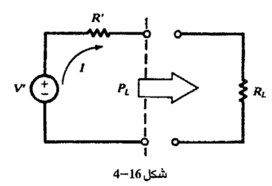
أحياناً يكون المطلوب معرفة أقصى قدرة يمكن نقلها من شبكة فعالة إلى حمل خارجي كمقاومة R_L . وبفرض أن الشبكة خطية فإنه يمكن تبسيطها إلى دائرة مكافئة كما في شكل 16-4 ومن ثم .

$$I = \frac{V'}{R' + R_L}$$

وبذلك تكون القدرة المستهلكة في الحمل .

$$P_L = \frac{V'^2 R_L}{(R' + R_L)^2} = \frac{V'^2}{4R'}\left[1 - \left(\frac{R' - R_L}{R' + R_L}\right)^2\right]$$

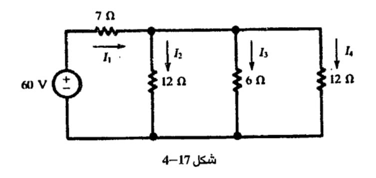
ومن الملاحظ أن القدرة R_L تصل إلى قيمتها العظمى $V'^2/4R'$ حينما $R_L = R'$ في هذه الحالة تكون القدرة في R' هي أيضاً $V'^2/4R'$ وبالتالي حينما تكون القدرة المنقولة قيمة عظمى تكون الجودة 50% .



شكل 16-4

مسائل محلولة

1-4 استخدم تيار الأفرع في الشبكة المبينة شكل 17-4 لإيجاد التيار المعطى بالمنبع 60 V .



شكل 17-4

قانونا KVL ، KCL يعطيان :

$$I_2(12) = I_3(6) \quad (10)$$
$$I_2(12) = I_4(12) \quad (11)$$
$$60 = I_1(7) + I_2(12) \quad (12)$$
$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \quad (13)$$

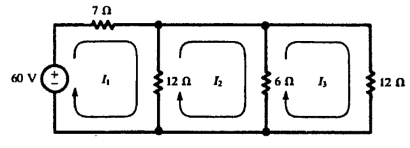
وبالتعويض بالمعادلتين (10)، (11) فى (13).

$$I_1 = I_2 + 2I_2 + I_2 = 4I_2 \quad (14)$$

والآن نعوض بالمعادلة (14) فى المعادلة (12).

$$60 = I_1(7) + \tfrac{1}{4}I_1(12) = 10I_1 \qquad \text{or} \qquad I_1 = 6\text{ A}$$

4-2 حل المسألة رقم 1-4 بطريقة تيار الشبيكة.



شكل 18-4

باستخدام KVL لكل شبيكة (انظر شكل 18-4) ينتج :

$$60 = 7I_1 + 12(I_1 - I_2)$$
$$0 = 12(I_2 - I_1) + 6(I_2 - I_3)$$
$$0 = 6(I_3 - I_2) + 12I_3$$

وبترتيب الحدود ووضع المعادلات فى شكل مصفوفة.

$$\begin{aligned} 19I_1 - 12I_2 \qquad &= 60 \\ -12I_1 + 18I_2 - 6I_3 &= 0 \\ -6I_2 + 18I_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{or} \qquad \begin{bmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستعمال قانون كرامر لإيجاد I_1.

$$I_1 = \begin{vmatrix} 60 & -12 & 0 \\ 0 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{vmatrix} = 17\,280 \div 2880 = 6\text{ A}$$

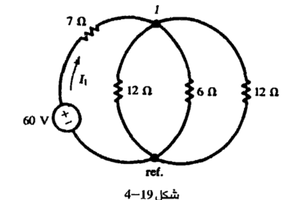
4-3 حل الشبكة للمسألة 1-4، 2-4 بطريقة جهد العقدة. انظر شكل 19-4.

لوجود عقدتين أساسيتين لذا توجد معادلة واحدة.

$$\frac{V_1-60}{7}+\frac{V_1}{12}+\frac{V_1}{6}+\frac{V_1}{12}=0$$

ومنها $V_1 = 18$ V ومن ثم.

$$I_1=\frac{60-V_1}{7}=6\text{ A}$$



شكل 19–4

4-4 فى المسألة 2-4 أوجد $R_{\text{input},1}$ واستخدمها لحساب I_1.

$$R_{\text{input},1}=\frac{\Delta_R}{\Delta_{11}}=\frac{2880}{\begin{vmatrix}18 & -6\\ -6 & 18\end{vmatrix}}=\frac{2880}{288}=10\,\Omega$$

Then
$$I_1=\frac{60}{R_{\text{input},1}}=\frac{60}{10}=6\text{ A}$$

4-5 أوجد $R_{\text{transfer},12}$ ، $R_{\text{transfer},13}$ للشبكة بالمسألة 2-4 واستخدمها لحساب كل من I_2 ، I_3.

المعاملات فى الحدود أرقام 2، 1 فى Δ_R يجب أن تحتوى على إشارة سالبة.

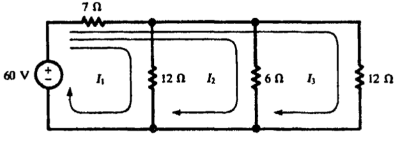
$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-12 & -6\\ 0 & 18\end{vmatrix}=216 \qquad R_{\text{transfer},12}=\frac{\Delta_R}{\Delta_{12}}=\frac{2880}{216}=13.33\,\Omega$$

Then, $I_2 = 60/13.33 = 4.50$ A.

$$\Delta_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-12 & 18\\ 0 & -6\end{vmatrix}=72 \qquad R_{\text{transfer},13}=\frac{\Delta_R}{\Delta_{13}}=\frac{2880}{72}=40\,\Omega$$

Then, $I_3 = 60/40 = 1.50$ A.

4-6 حل المسألة رقم 4-1 باستخدام التيار الحلقى المبين فى شكل 4-20 .



شكل 4–20

نحصل على عناصر المصفوفة من المعادلات التى يمكن إيجادها بمجرد النظر وباتباع قوانين بند 4-2 .

$$\begin{bmatrix} 19 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Thus
$$\Delta_R = \begin{bmatrix} 19 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 19 \end{bmatrix} = 2880$$

لاحظ أن فى المسألة 4-2 أيضاً $\Delta_R = 2880$ بالرغم من أن العناصر فى المحدد مختلفة . وأن جميع الشبيكات أو الحلقات تؤدى إلى نفس القيمة للمحدد Δ_R . وتكون محددات البسط الثلاث هى :

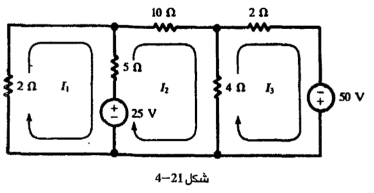
$$N_1 = \begin{vmatrix} 60 & 7 & 7 \\ 60 & 13 & 7 \\ 60 & 7 & 19 \end{vmatrix} = 4320 \qquad N_2 = 8642 \qquad N_3 = 4320$$

وبالتالى

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta_R} = \frac{4320}{2880} = 1.5\text{ A} \qquad I_2 = \frac{N_2}{\Delta_R} = 3\text{ A} \qquad I_3 = \frac{N_3}{\Delta_R} = 1.5\text{ A}$$

التيار الذى يعطيه المنبع 60 V هو مجموع الثلاث تيارات الحلقية $I_1 + I_2 + I_3 = 6$ A .

4-7 أكتب معادلة مصفوفة تيار الشبيكة للشبكة المبينة شكل 4-21 بمجرد النظر وحلها لإيجاد قيم التيارات .



شكل 4–21

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Solving,

$$I_1 = \begin{vmatrix} -25 & -5 & 0 \\ 25 & 19 & -4 \\ 50 & -4 & 6 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = (-700) \div 536 = -1.31 \text{ A}$$

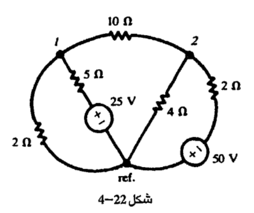
Similarly,

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta_R} = \frac{1700}{536} = 3.17 \text{ A} \qquad I_3 = \frac{N_3}{\Delta_R} = \frac{5600}{536} = 10.45 \text{ A}$$

4-8 حل المسألة رقم 7-4 بطريقة جهد العقدة .

ترسم الدائرة مرة أخرى كما فى شكل 22-4 باعتبار وجود عقدتان أساسيتان هما 1 ، 2 والعقدة الثالثة تختار كعقدة مقارنة باستخدام KCL يجب أن يكون محصلة التيار الخارجة من العقدة 1 صفراً .

$$\frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - 25}{5} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0$$



شكل 22–4

وبالمثل عند العقدة 2 .

$$\frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{4} + \frac{V_2 + 50}{2} = 0$$

ويوضع المعادلتين فى شكل المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ -25 \end{vmatrix}$$

ويكون محدد المعاملات ومحددات البسط كما يلى :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0.80 & -0.10 \\ -0.10 & 0.85 \end{vmatrix} = 0.670$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 5 & -0.10 \\ -25 & 0.85 \end{vmatrix} = 1.75 \qquad N_2 = \begin{vmatrix} 0.80 & 5 \\ -0.10 & -25 \end{vmatrix} = -19.5$$

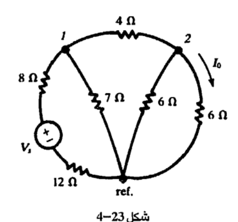
ومنها ،

$$V_1 = \frac{1.75}{0.670} = 2.61 \text{ V} \qquad V_2 = \frac{-19.5}{0.670} = -29.1 \text{ V}$$

وبدلالة هذه الجهود تحدد قيمة التيارات فى شكل 4-21 بالتالى .

$$I_1 = \frac{-V_1}{2} = -1.31 \text{ A} \qquad I_2 = \frac{V_1 - V_2}{10} = 3.17 \text{ A} \qquad I_3 = \frac{V_2 + 50}{2} = 10.45 \text{ A}$$

4-9 للشبكة المبينة فى الشكل 4-23 أوجد V_s التى تجعل $I_0 = 7.5$ mA .



شكل 4-23

نستخدم طريقة جهد العقدة ويمكن كتابة المعادلات فى شكل مصفوفة كما يلى :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s/20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

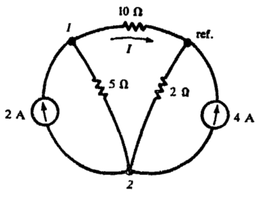
وبالحل لإيجاد V_s .

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.443 & V_s/20 \\ -0.250 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.443 & -0.250 \\ -0.250 & 0.583 \end{vmatrix}} = 0.0638 V_s$$

Then $$7.5 \times 10^{-3} = I_0 = \frac{V_2}{6} = \frac{0.0638 V_s}{6}$$

from which $V_s = 0.705$ V.

4-10 فى الشبكة المبينة شكل 24-4 أوجد التيار المار فى المقاومة 10-Ω .



شكل 24–4

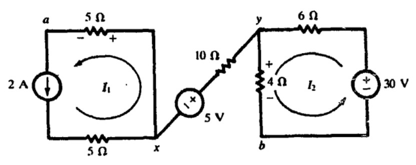
تكتب معادلات العقد فى شكل مصفوفة بمجرد النظر كالتالى :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}+\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -0.20 \\ -6 & 0.70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.30 & -0.20 \\ -0.20 & 0.70 \end{vmatrix}} = 1.18 \text{ V}$$

Then, $I = V_1/10 = 0.118$ A.

4-11 أوجد الجهد V_{ab} فى الشبكة الموضحة فى شكل 25-4 .



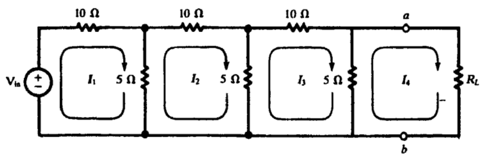
شكل 25–4

الحلقتان المغلقتان بالشكل لا تعتمد أى منهما على الأخرى وبالتالى لا يمر تيار خلال الفرع الواصل بينهما .

$$I_1 = 2 \text{ A} \qquad I_2 = \frac{30}{10} = 3 \text{ A}$$

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = -I_1(5) - 5 + I_2(4) = -3 \text{ V}$$

4-12 للشبكة السُلامية المبينة شكل 4-26 أوجد مقاومة الانتقال بدلالة النسبة بين V_{in} إلى I_4.



شكل 4–26

بمجرد النظر تكون معادلة الشبكة.

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 20 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5+R_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

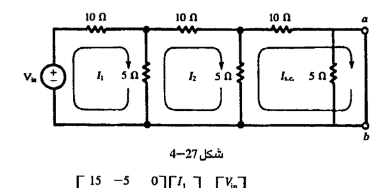
$$\Delta_R = 5125\,R_L + 18\,750 \qquad N_4 = 125V_{in}$$

$$I_4 = \frac{N_4}{\Delta_R} = \frac{V_{in}}{41R_L + 150} \text{ (A)}$$

and $$R_{\text{transfer},14} = \frac{V_{in}}{I_4} = 41R_L + 150 \quad (\Omega)$$

4-13 أوجد مكافئ ثيفنين للدائرة المبينة شكل 4-26 على يسار الطرفان ab.

نحصل على تيار القصر $I_{s.c.}$ من الثلاث شبيكات بالدائرة المبينة شكل 4-27.

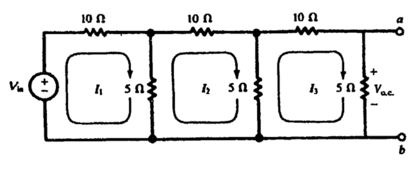


شكل 4–27

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_{s.c.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{s.c.} = \frac{V_{in} \begin{vmatrix} -5 & 20 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}}{\Delta_R} = \frac{V_{in}}{150}$$

جهد الدائرة المفتوحة $V_{o.c.}$ هو الجهد على طرفى المقاومة 5-Ω المبينة فى شكل 28-4.



شكل 28-4

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \frac{25V_{in}}{5125} = \frac{V_{in}}{205} \quad \text{(A)}$$

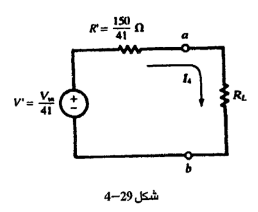
وبذلك يكون جهد ثفنين $V' = V_{o.c.} = I_3(5) = V_{in} / 41$ ومنها :

$$R_{Th} = \frac{V_{o.c.}}{I_{s.c.}} = \frac{150}{41}\ \Omega$$

الدائرة المكافأة مبينة بشكل 29-4 وبتوصيل المقاومة R_L للطرفين ab فإن تيار الخرج يكون :

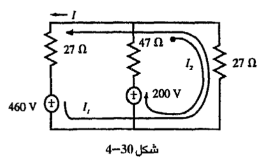
$$I_4 = \frac{V_{in}/41}{(150/41) + R_L} = \frac{V_{in}}{41R_L + 150} \quad \text{(A)}$$

والتى تتفق مع المسألة 12-4.



شكل 29-4

4-14 باستخدام طريقة التراكب أوجد قيمة التيار I لكل جهد منبع فى الدائرة المبينة شكل 4-30.



شكل 4–30

نختار تيار الحلقات بحيث يكون لكل منبع تيار واحد.

$$\begin{bmatrix} 54 & -27 \\ -27 & 74 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -460 \\ 200 \end{bmatrix}$$

ومن المنبع 460 V.

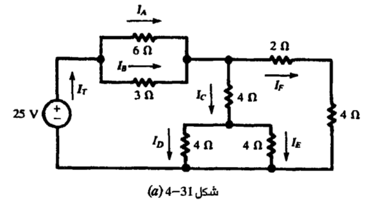
$$I_1' = I' = \frac{(-460)(74)}{3267} = -10.42 \text{ A}$$

ومن المنبع 200 V.

$$I_1'' = I'' = \frac{-(200)(-27)}{3267} = 1.65 \text{ A}$$

Then, $I = I' + I'' = -10.42 + 1.65 = -8.77 \text{ A}$

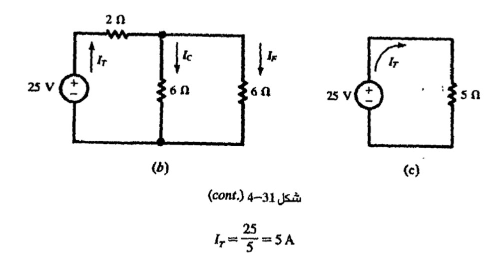
4-15 أوجد التيار فى كل مقاومة شكل 4-31(a) باستخدام طريقة تبسيط الشبكة.



شكل 4–31 (a)

الخطوة الأولى هى تحويل كل مقاومتين على التوازى إلى ما يكافئهما فبالنسبة للمقاومتين 6Ω، 3Ω المقاومة المكافئة لهما $R_{eq} = (6)(3)/(6+3) = 2\Omega$ والمقاومتين 4Ω على التوازى المقاومة

المكافئة لهما $R_{eq} = 2\Omega$ وترسم الدائرة مرة أخرى مع وجود مقاومات التوالى شكل 4-31(b) وفى هذه الحالة نجد أن مقاومتى التوازى 6Ω لهما المقاومة المكافئة $R_{eq} = 3\Omega$ وهى بدورها على التوالى مع المقاومة 2Ω وبذلك تكون المقاومة الكلية $R_T = 5\Omega$ كما هو مبين فى شكل 4-31(c). والتيار الكلى يكون:



شكل 4-31 (*cont.*)

$$I_T = \frac{25}{5} = 5\ \text{A}$$

وبالتالى يمكن حساب تيارات الأفرع بالرجوع إلى دوائر شكل 4-31(b) وشكل 4-31(a).

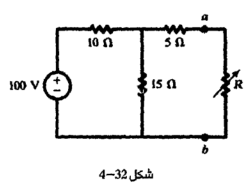
$$I_C = I_F = \tfrac{1}{2} I_T = 2.5\ \text{A}$$

$$I_D = I_E = \tfrac{1}{2} I_C = 1.25\ \text{A}$$

$$I_A = \frac{3}{6+3} I_T = \frac{5}{3}\ \text{A}$$

$$I_B = \frac{6}{6+3} I_T = \frac{10}{3}\ \text{A}$$

4-16 أوجد قيمة المقاومة المتغيرة التى تنتج عن أكبر قدرة منقولة عند الطرفين ab للدائرة المبينة شكل 4-32.



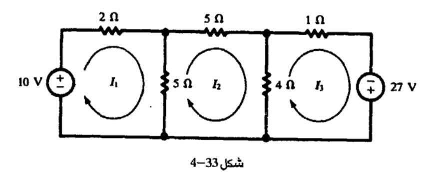
شكل 4-32

تحصل أولاً على الدائرة المكافئة لثيفنين حيث $R' = 11\Omega$ ، $V' = 60$ V وبالرجوع لبند 4-10 نجد أن القدرة المنقولة تكون أكبر ما يمكن عند $R = R' = 11\Omega$.

$$P_{max} = \frac{V'^2}{4R'} = 81.82 \text{ W}$$

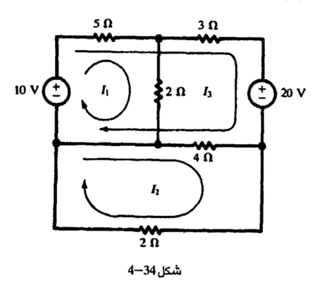
مسائل إضافية

4-17 استخدم طريقة تيار الشبيكة للشبكة المبينة شكل 33-4 واكتب معادلات المصفوفة بمجرد النظر وأوجد التيار I_1 بفك محدد البسط بالنسبة للعمود المحتوى على منابع الجهد لتُبين أن كل منبع يغذى تياراً قيمته 2.13 A .



شكل 33-4

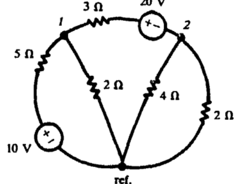
4-18 بالنسبة لتيارات الحلقة المبينة فى الشبكة فى الشكل 34-4 أكتب معادلة المصفوفة وأوجد قيمة التيارات الثلاثة . الجواب 3.55 A, - 1.98 A, - 2.98 A .



شكل 34-4

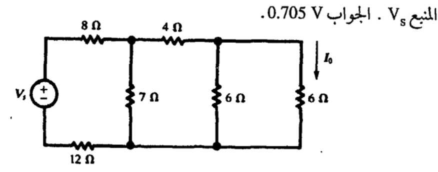
4-19 الشبكة فى المسألة 4-18 رسمت مرة أخرى فى شكل 4-35 وذلك لحلها بطريقة جهد العقدة. أوجد جهدى العقدة V_1 ، V_2 وتحقق من نتائج التيارات فى المسألة 4-18.

الجواب 7.11 V, - 3.96 V.



شكل 4-35

4-20 فى الشبكة المبينة شكل 4-36 كان التيار $I_0 = 7.5$ mA استخدم تيارات الشبيكة لإيجاد قيمة جهد المنبع V_s . الجواب 0.705 V.

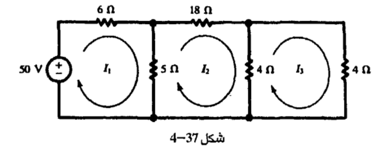


شكل 4-36

4-21 استخدم المحددات المناسبة فى المسألة 4-20 للحصول على مقاومة الدخل كما تبدو لجهد المنبع V_s . تأكد من النتائج باستخدام تبسيط الشبكة. الجواب 23.5Ω.

4-22 للشبكة المبينة شكل 4-36 أوجد مقاومة الانتقال التى تنسب التيار I_0 لجهد المنبع V_s . الجواب 94.0Ω.

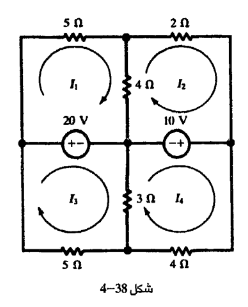
4-23 الشبكة المبينة شكل 4-37. أوجد تيارات الشبيكة. الجواب 5.0 A, 1.0 A, 0.5 A.



شكل 4-37

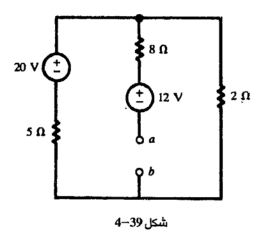
4-24 باستخدام المصفوفات للمسألة 4-23 أحسب $R_{input, 1}$ ، $R_{transfer\ 12}$ ، $R_{transfer, 13}$.
الجواب $10\ \Omega$ ، $50\ \Omega$، $100\ \Omega$.

4-25 فى الشبكة المبينة شكل 4-38. أوجد تيارات الشبيكة الأربعة. الجواب - 2.11 A, - 0.263 A, - 2.34 A, - 0.426 A.



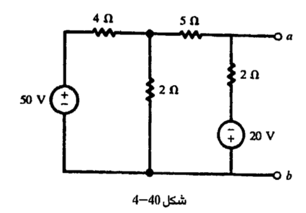
شكل 4-38

4-26 فى الدائرة المبينة شكل 4-39. أوجد $V_{o.c.}$, I_{sc}, R' عند الطرفين ab باستخدام تيار الشبيكة أو باستخدام جهد العقدة اعتبر الطرف a موجب بالنسبة للطرف b. الجواب -6.29 V, - 0.667 A, - 9.44 Ω.



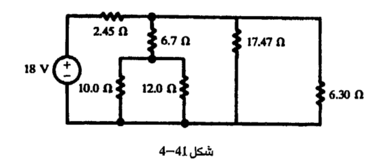
شكل 4-39

4-27 استخدم طريقة جهد العقدة للحصول على $V_{o.c.}$ ، $I_{s.c.}$ عند الطرفين ab للشبيكة المبينة بشكل 4-40 . اعتبر الطرف a موجب بالنسبة للطرف b . الجوال 11.2 V, - 7.37 A .



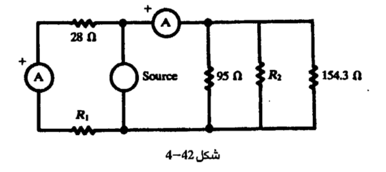
شكل 4-40

4-28 استخدم طريقة تبسيط الشبكة للحصول على التيار فى كل مقاومة للدائرة المبينة شكل 4-41 . الجواب فى المقاومة 2.45Ω؛ التيار 3.10 A ، 6.7Ω؛ 0.885 A؛ 10.0Ω ، 0.466 A؛ 12.0Ω ، 0.389 A؛ 17.47Ω ، 0.595 A؛ 6.30Ω ، 1.65 A .



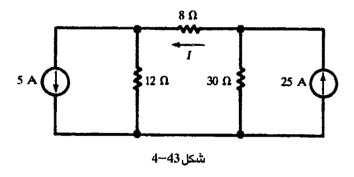
شكل 4-41

4-29 كلا الأمبيرومتران يقرأ 1.70 A فى الدائرة المبينة شكل 4-42 . فإذا كان المنبع يغذى قدرة قيمتها 300 W للدائرة . أوجد كل من R1 ، R2 . الجواب 443.0Ω ، -23.9Ω .



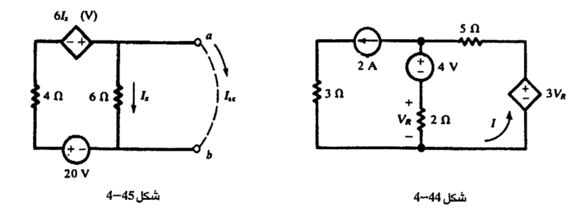
شكل 4-42

4-30 فى الشبكة المبينة شكل 43-4 كان تيار المنبعين هما I'، I" حيث I = I" + I' . استخدم طريقة التراكب للحصول على هذه التيارات . الجواب 16.2 A، 15.0 A، 1.2 A .



شكل 43-4

4-31 أوجد التيار I فى الشبكة المبينة فى الشكل 44-4 . الجواب 12 A - .



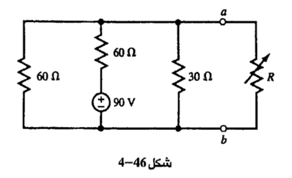
شكل 45-4

شكل 44-4

4-32 أوجد مكافئ ثفنين ونورتون للشبكة المبينة شكل 45-4 .

الجواب V' = 30 V, I' = 5 A, R' = 6Ω .

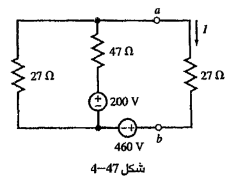
4-33 أوجد أقصى قدرة منقولة التى تعطيها الشبكة الفعالة على يسار الطرفان ab وذلك للمقاومة المتغيرة R المبينة شكل 46-4 . الجواب 8.44 W .



شكل 46-4

4-34 إذا كان جهد مولد تيار مستمر يعمل فى حالة عدم الحمل هو 120 V . وحينما يغذى بحمل مقنن يكون التيار 40 A والجهد ينخفض إلى 112 V أوجد مكافئات ثفنين ونورتون. الجواب $V' = 120$ V ، $I' = 600$ A ، $R' = 0.2\Omega$.

4-35 الشبكة التى فى مسألة 4-14 رسمت مرة أخرى فى شكل 4-47 وأضيف الطرفان a ، b . بسط الشبكة على يسار ab بالدائرة المكافئة لثفنين أو نورتون وحل المسألة للحصول على التيار I . الجواب 8.77 A.



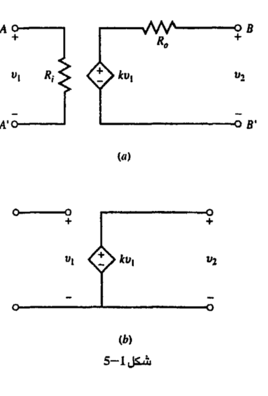
شكل 4-47

الفصل الخامس

دوائر المكبرات ومكبرات التشغيل

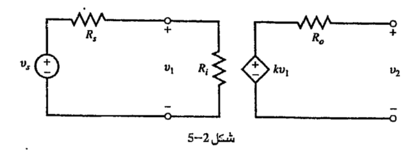
5.1 تمثيل المكبر :

المكبر هو نبيطة تكبر الإشارات . وقلب المكبر هو منبع متحكم فيه بإشارة دخل . والشكل المبسط لمكبر جهد هو كالمبين فى شكل 5-1(a) . وغالباً ما يتم توصيل طرفى المقارنة للدخل والخرج معاً ليكونا طرف مقارنة واحد . وحينما يكون طرف الخرج مفتوحاً نحصل على $\upsilon_2 = k\upsilon_1$ حيث k وهو معامل التضعيف ويسمى كسب الدائرة المفتوحة والمقاومتان R_i ، R_0 هما مقاومتى الدخل والخرج للمكبر على الترتيب . وللأداء الأفضل يكون من المرغوب أن تكون R_i كبيرة ، R_0 صغيرة . وفى المكبر المثالى $R_i = \infty$ ، $R_0 = 0$ كما فى شكل 5-1(b) . وأى تغيير فى الحالات السابقة يقلل من الكسب الكلى .



شكل 5–1

مثـــال 5-1: منبع جهد عملى (واقعى) υ_s له مقاومة داخلية R_s متصلاً بطرفى الدخل لمكبر جهد له مقاومة داخلية R_i كما فى شكل 5-2. أوجد υ_2/υ_s.



شكل 5-2

نحصل على جهد الدخل υ_1 للمكبر بتقسيم υ_s بين R_i، R_s.

$$\upsilon_1 = \frac{R_i}{R_i + R_s}\upsilon_s$$

جهد الخرج υ_2 هو :

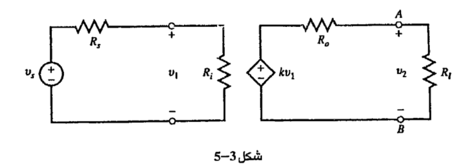
$$\upsilon_2 = k\upsilon_1 = \frac{kR_i}{R_i + R_s}\upsilon_s$$

ومنها

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_s} = \frac{R_i}{R_i + R_s}k \qquad (1)$$

ويحمل المكبر جهد المنبع ويقل كسب الدائرة المفتوحة بالمعامل $R_i / (R_i + R_s)$.

مثـــال 5-2: شكل 5-3 يوضح منبع عملى للجهد υ_s ذو مقاومة داخلية R_s يغذى الحمل R_L خلال مكبر له مقاومتى دخل وخرج R_i، R_0.



شكل 5-3

بتقسيم الجهد

$$v_1 = \frac{R_i}{R_i + R_s} v_s$$

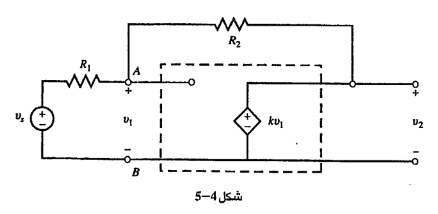
وبالمثل يكون جهد الخرج

$$v_2 = kv_1 \frac{R_l}{R_l + R_o} = k \frac{R_i R_l}{(R_i + R_s)(R_l + R_o)} v_s \qquad \text{or} \qquad \frac{v_2}{v_s} = \frac{R_i}{R_i + R_s} \times \frac{R_l}{R_l + R_o} k \qquad (2)$$

لاحظ أن كسب الدائرة المفتوحة يقل مرة أخرى بمعامل إضافى هو $R_L / (R_L + R_0)$ الذى يجعل جهد الخرج معتمداً على الحمل.

5.2 التغذية الخلفية فى دوائر المكبرات :

يمكن التحكم فى كسب المكبر بتغذية خلفية بجزء من الخرج للدخل كما يحدث فى المكبر المثالى شكل 5-4 خلال مقاومة التغذية الخلفية R_2. ونسبة التغذية الخلفية $R_1 / (R_1 + R_2)$ تؤثر فى الكسب الكلى وتجعل المكبر أقل حساسية للتغيرات فى قيمة k.



شكل 5-4

مثـــال 5-3: أوجد v_2/v_s فى شكل 5-4 وعبر عنها كدالة للنسبة $b = R_1 / (R_1 + R_2)$.

نعرف من المكبر أن :

$$v_2 = kv_1 \qquad \text{or} \qquad v_1 = v_2 / k \qquad (3)$$

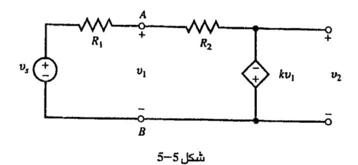
وباستخدام KCL عند العقدة A

$$\frac{v_1 - v_s}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \qquad (4)$$

عوض عن υ_1 من (3) فى المعادلة (4)

$$\frac{v_2}{v_s}=\frac{R_2k}{R_2+R_1-R_1k}=(1-b)\frac{k}{1-bk} \qquad \text{where } b=\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

مثـــال 5-4: فى شكل 5-5، $R_1 = 1k\Omega$، $R_2 = 5k\Omega$ أوجد (أ) υ_2/υ_s كدالة للكسب k للدائرة المفتوحة. (ب) أحسب υ_2/υ_s لقيم $k = 100$، $k = 1000$ وناقش الإجابات.



شكل 5-5

(أ) يختلف الشكلان 5-4، 5-5 فى قطبية منبع الجهد التابع. لإيجاد υ_2/υ_s استخدم النتائج التى فى مثال 5-3 وغير k لتكون -k فى (5).

$$\frac{v_2}{v_s}=(1-b)\frac{-k}{1+bk} \qquad \text{where } b=\frac{R_1}{R_1+R_2}=\frac{1}{6}$$

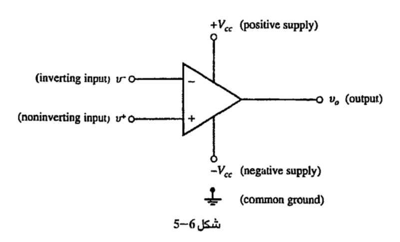
$$\frac{v_2}{v_s}=\frac{-5k}{6+k}$$

(ب) عند $k = 100$، $\upsilon_2/\upsilon_s = 4.72$، عند $k = 1000$، $\upsilon_2/\upsilon_s = -4.97$. ولذلك نلاحظ أن بزيادة k لعشرة أمثال ينتج فقط 5.3% تغير فى υ_2/υ_s أى أنه $(4.97 - 4.72) / 4.72 = 5.3\%$.

لاحظ أن للقيم الكبيرة فى الثابت k تقترب υ_2/υ_s من $-R_2/R_1$ والتى لا تعتمد على قيمة k.

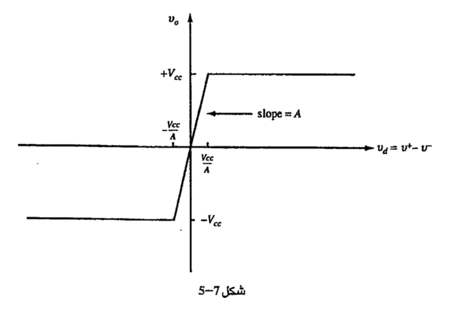
5.3 مكبر التشغيل

مكبر التشغيل (op amp) هو نبيطة بطرفى دخل يرمز لهما بالرمز +، - أو بالطرف الغير عاكس والطرف العاكس على الترتيب. وتتصل أيضاً النبيطة بمنبع قدرة تيار مستمر ($+V_{cc}$، $-V_{cc}$). والطرف المشترك وهو طرف المقارنة للدخل والخرج ومنبع القدرة يوصل فى خارج المكبر بالأرض كما فى شكل 5-6.



شكل 5-6

يعتمد جهد الخرج v_0 على $v_d = v^+ - v^-$. وبإهمال التأثيرات السعوية تكون دالة التحويل هى المبينة بشكل 5-7 . فى المجال الخطى $v_0 = Av_d$ ويكون الكسب A للدائرة المفتوحة كبيراً جداً غالباً . وتتشبع v_0 عند نهايتى قيم $+V_{cc}$ ، $-V_{cc}$ حينما يزيد جهد الدخل v_d عن المستوى الخطى أى أن $|v_d| > V_{cc}/A$.

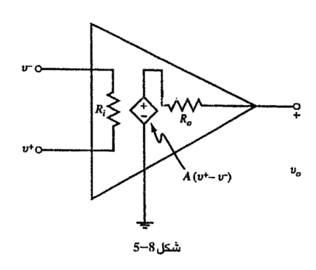


شكل 5-7

شكل 5-8 يبين تمثيل مكبر تشغيل فى المجال الخطى مع حذف توصيلات منبع القدرة للتبسيط . وعملياً تكون R_i كبيرة ، و R_0 صغيرة ، و A تتراوح بين 10^5 إلى بضع ملايين . وتمثيل المكبر فى شكل 5-8 يفى بالغرض طالما أن الخرج يبقى بين $+v_{cc}$ ، $-v_{cc}$ وقيمة V_{cc} غالباً ما تكون بين 5 ، 18 V .

مثـــــال 5-5: فى مكبر التشغيل المبين فى شكل 5-8، $V_{cc} = 15\ V$، $A = 10^5$، $\upsilon^- = 0$. أوجد الحد الأعلى لقيم υ^+ للتشغيل الخطى .

$$|\upsilon_o| = |10^5 \upsilon^+| < 15\ V \qquad |\upsilon^+| < 15 \times 10^{-5}\ V = 150\ \mu V$$



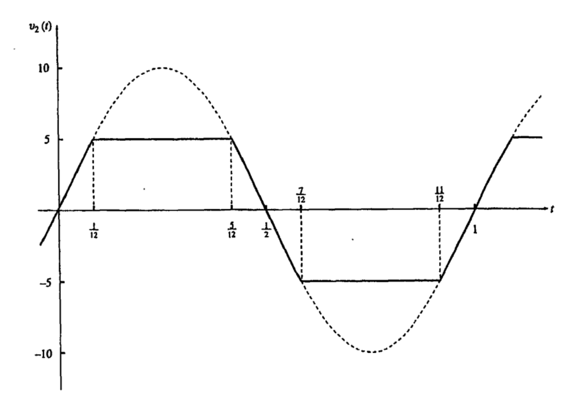
شكل 5-8

مثـــــال 5-6: فى مكبر التشغيل شكل 5-8 . $V_{cc} = 5\ V$، $A = 10^5$، $\upsilon^- = 0$، $\upsilon^+ = 100 \sin 2\pi t\ (\mu V)$. أوجد وارسم جهد خرج الدائرة المفتوحة υ_0 .

دخل مكبر التشغيل هو $\upsilon_d = \upsilon^+ - \upsilon^- = (100 \sin 2\pi t) \times 10^{-6}\ (V)$.

وحينما يعمل مكبر التشغيل فى الفترة الخطية تكون $\upsilon_0 = 10^5\ \upsilon_d = 10 \sin 2\pi t\ (V)$ ويبـقى الخـرج ثابتاً بين القيمتين +5V، -5V كـما فى شـكل 5-9 . ويبـدأ التشبع حينما $\upsilon_0 = 10 \sin 2\pi t$ تصل إلى المستوى 5V . وهذا يحـدث عند $t = 1/12s$. وتنتهى فترة التشبع وتقل قيمة الخرج عن 5V عند $t = 5/12s$. وبالمثل يحـدث التـشبع فى نصف الوجه السالب فى الفترة $t = 7/12s$ إلى $t = 11/12s$ ويكون الخرج خلال دورة كاملة فى الفترة من $t = 0$ إلى $t = 1s$. كما يلى :

$$\upsilon_o = \begin{cases} 5 & 1/12 < t < 5/12 \\ -5 & 7/12 < t < 11/12 \\ 10 \sin 2\pi t & \text{otherwise} \end{cases}$$



شكل 9-5

مثـــال 5-7: كرر مثال 5-6 لقيم $\upsilon^- = 25\ \mu V$ ، $\upsilon^+ = 50 \sin 2\pi t$

$$v_d = v^+ - v^- = (50 \sin 2\pi t)10^{-6} - 25 \times 10^{-6} = 50 \times 10^{-6}(\sin 2\pi t - 1/2)\ (V)$$

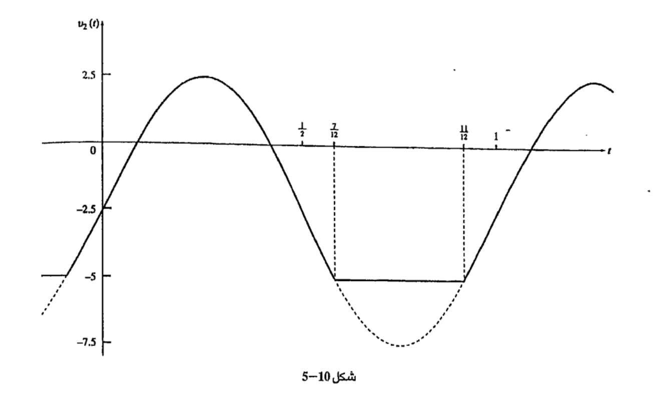
يكون خرج مكبر التشغيل فى المنطقة الخطية كالتالى :

$$v_o = 10^5 v_d = 5(\sin 2\pi t - 1/2)\ (V)$$

يتشبع الجهد υ_0 عند المستوى -5V حينما $5(\sin 2\pi t - 1/2) < -5,\ 7/12 < t < 11/12$ كما فى شكل 10-5.

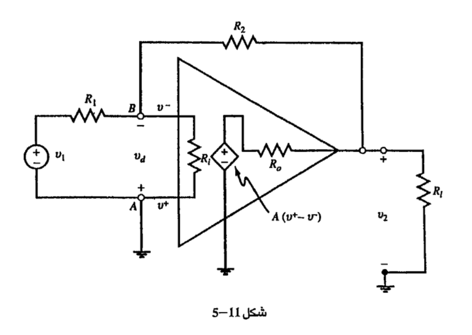
ويكون الخرج خلال دورة واحدة كاملة للجهد υ_0 بالفولت فى الفترة من $t = 0$ إلى $t = 4s$ هى :

$$v_o = \begin{cases} -5 & 7/12 < t < 11/12 \\ 5(\sin 2\pi t - 1/2) & \text{otherwise} \end{cases}$$



شكل 10–5

مثـــــال 8-5: فى شكل 11-5، $R_1 = 10k\Omega$ ،$R_i = 500k\Omega$ ،$R_0 = 0$ ،$A = 10^5$. أوجد υ_2/υ_1 . افترض أن المكبر لا يصل للتشبع .



شكل 11–5

مجموع التيارات عند العقدة B يساوى صفراً. لاحظ أن $\upsilon_A = 0$ ، $\upsilon_B = -\upsilon_d$ لذلك :

$$\frac{\upsilon_1 + \upsilon_d}{10} + \frac{\upsilon_d}{500} + \frac{\upsilon_2 + \upsilon_d}{50} = 0 \tag{6}$$

وحيث أن $R_0 = 0$ فإن :

$$\upsilon_2 = A\upsilon_d = 10^5\upsilon_d \qquad \text{or} \qquad \upsilon_d = 10^{-5}\upsilon_2 \tag{7}$$

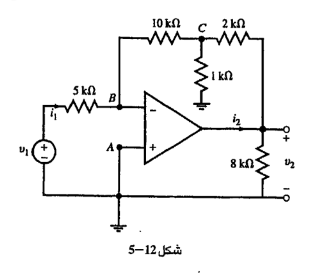
وبالتعويض عن υ_d من (7) فى المعادلة (6) فإن النسبة υ_2/υ_1 تكون :

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{-5}{1 + 10^{-5} + 5 \times 10^{-5} + 0.1 \times 10^{-5}} = -5$$

5.4 تحليل الدوائر المحتوية على مكبر تشغيل مثالى

فى مكبر التشغيل المثالى نجد أن كلا منR_i ، A تكون ما لا نهاية وقيمة R_0 صفراً ولذلك فإن مكبر التشغيل لا يسحب تياراً من الطرف العاكس أو الغير عاكس للدخل وفى حالة عدم التشبع يكون هذان الدخلان لهما نفس الجهد. فى هذا الباب سنفترض أن مكبرات التشغيل مثالية وتعمل فى المنطقة الخطية إلا إذا ذكر خلاف ذلك.

مثـــال 5-9: فى مكبر التشغيل المثالى المبين شكل 12-5 أوجد (أ) υ_2/υ_1 ، (ب) مقاومة الدخل υ_1/i_1 ، (جـ) i_1 ، i_2 ، p_1 (القدرة المعطاة هى عن طريق υ_1) ، p_2 (القدرة المستهلكة فى المقاومات) إذا كان الجهد $\upsilon_1 = 0.5V$. علماً بأن المكبر لا يصل إلى حالة التشبع .



شكل 12–5

(أ) الطرف A الغير عاكس متصل بالأرض وبذلك $\upsilon_A = 0$. وحيث أن مكبر التشغيل مثالى ولا يصل إلى حالة التشبع فإن $\upsilon_B = 0$. بتطبيق KCL عند العقدتين B، C وبملاحظة أن مكبر التشغيل لا يسحب تياراً.

Node *B*: $$\frac{v_1}{5}+\frac{v_C}{10}=0 \qquad \text{or} \qquad v_C=-2v_1 \qquad (8)$$

Node *C*: $$\frac{v_C}{10}+\frac{v_C}{1}+\frac{v_C-v_2}{2}=0 \qquad \text{or} \qquad v_2=3.2v_C \qquad (9)$$

وبالتعويض بقيمة υ_c من المعادلة (8) فى المعادلة (9) .

$$v_2=-6.4v_1 \qquad \text{or} \qquad v_2/v_1=-6.4$$

(ب) حيث أن $\upsilon_B = 0$ ، $i_1 = \upsilon_1/5000$ ومن ذلك تكون

مقاومة الدخل $\upsilon_1/i_1 = 5k\Omega$

(جـ) تيار الدخل $i_1 = \upsilon_1/5000$ ، $\upsilon_1 = 0.5V$ ، $i_1 = 0.5/5000 = 0.1\ mA$

لإيجاد التيار i_2 نطبق KCL عند خرج مكبر التشغيل .

$$i_2=\frac{v_2}{8000}+\frac{v_2-v_C}{2000}$$

ومن الجزء (أ) $\upsilon_2 = -3.2V$ ، $\upsilon_C = -1V$ وبالتالى $i_2 = 1.5\ mA$

القدرة المعطاة بالمنبع υ_1 هى :

$$p_1=v_1i_1=v_1^2/5000=50\times10^{-6}\ \text{W}=50\ \mu\text{W}$$

وتكون القدرات فى المقاومات هى :

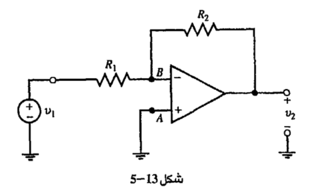
1 kΩ: $$p_{1\,k\Omega}=v_C^2/1000=0.001\ W=1000\ \mu\text{W}$$
2 kΩ: $$p_{2\,k\Omega}=(v_2-v_C)^2/2000=0.00242\ \text{W}=2420\ \mu\text{W}$$
5 kΩ: $$p_{5\,k\Omega}=v_1^2/5000=0.00005\ \text{W}=50\ \mu\text{W}$$
8 kΩ: $$p_{8\,k\Omega}=v_2^2/8000=0.00128\ \text{W}=1280\ \mu\text{W}$$
10 kΩ: $$p_{10\,k\Omega}=v_C^2/10000=0.0001\ \text{W}=100\ \mu\text{W}$$

القدرة الكلية المستهلكة فى جميع المقاومات هى :

$$p_2 = p_{1\,k\Omega} + p_{2\,k\Omega} + p_{5\,k\Omega} + p_{8\,k\Omega} + p_{10\,k\Omega} = 1000 + 2420 + 50 + 1280 + 100 = 4850\ \mu W$$

5.5 دائــرة المكبر العاكس

فى دائرة المكبـر العــاكس يتم توصـيل طرف إشـارة الدخـل عن طريق المقـاومـة R_1 إلى الطرف العاكس لمكبر التشغيل ونوصل طرف الخرج عن طريق مقاومة تغذية خلفية R_2 بالطرف العاكس أيضاً. ويتم توصيل الطرف الغير عاكس بالأرض كما فى شكل 13-5 .



شكل 13–5

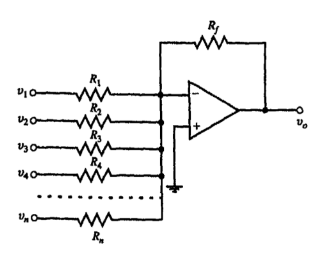
للحصول على الكسب v_2/v_1 استخدم KCL للتيارات عند العقدة B .

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{v_2}{v_1} = -\frac{R_2}{R_1} \qquad (10)$$

ويكون الكسب سالباً وتحدد قيمته باختيار قيم المقاومات فقط . ومقاومة الدخل للدائرة هى R_1 .

5.6 دائرة المكبر الجامـع :

يمكن معـرفة المجـموع المؤثر لعدة جهود فى دائرة باستـخدام الدائرة التى فى شكل 14-5 وهـى تسمى دائرة التجميع وهى امتداد لدائرة المكبر العاكس .



شكل 14–5

للحصول على الخرج استخدم KCL لعقدة الطرف العاكس :

$$\frac{v_1}{R_1}+\frac{v_2}{R_2}+\cdots+\frac{v_n}{R_n}+\frac{v_o}{R_f}=0$$

ومنها

$$v_o=-\left(\frac{R_f}{R_1}v_1+\frac{R_f}{R_2}v_2+\cdots+\frac{R_f}{R_n}v_n\right) \qquad (11)$$

مثـــال 10-5 : اعتبر الدائرة فى شكل 15-4 لها أربعة خطوط دخل ذو مقاومات هى $R_1 = 1$ ، $R_2 = 1/2$ ، $R_3 = 1/4$ ، $R_4 = 1/8$ ، $R_f = 1$. وهذه القيم بالكيلو أوم (kΩ) وفرضت قيم لجهد كل خط إما 0 أو 1V أوجد v_0 بدلالة v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 إذا أعتبرت القيم التالية لكل دخل .

(أ) $v_1 = 1\text{ V}$ $\quad v_2 = 0$ $\quad v_3 = 0$ $\quad v_4 = 1\text{ V}$

(ب) $v_1 = 0$ $\quad v_2 = 1\text{ V}$ $\quad v_3 = 1\text{ V}$ $\quad v_4 = 1\text{ V}$

من المعادلة (11) :

$$v_o = -(8v_4 + 4v_3 + 2v_2 + v_1)$$

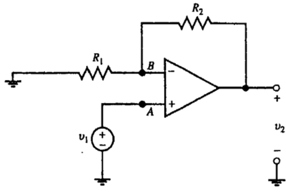
وبالتعويض بقيم υ_1 إلى υ_4 نحصل على :

$$(a) \quad v_o = -9 \text{ V}$$
$$(b) \quad v_o = -14 \text{ V}$$

المجموعة { υ_1 ، υ_2 ، υ_3 ، υ_4 } تكون تعاقب ثنائى يحتوى على أربعة أرقام بقيمة مرتفعة (1V) أو قمم منخفضة (0V) . ومجموعات الدخل المعطاة فى (أ) ، (ب) تؤول إلى الأرقام الثنائية $(91) = (1001)_2$ ، $(1110)_2 = (14)_{10}$ على التوالى وعند جهود الدخل بقيمة مرتفعة (1V) أو منخفضة (0V) فإن الدائرة تحول الأرقام الثنائية التى تمثل مجموعة الدخل { υ_1 ، υ_2 ، υ_3 ، υ_4 } إلى جهد سالب ، وهو عند قياسه بقيم V يكون مساوياً لمجموعة الدخل ممثلة للأساس 10 . وتكون الدائرة عبارة عن محول رقمى/ تناظرى (D/A) .

5.7 دوائــر المكبر الغير عاكس

فى دائرة المكبر الغير عاكس تصل إشارة الدخل إلى الطرف الغير عاكس فى مكبر التشغيل ويوصل الطرف العاكس بالخرج عن طريق المقاومة R_2 وأيضاً بالأرض عن طريق المقاومة R_1 انظر شكل 5-15 .



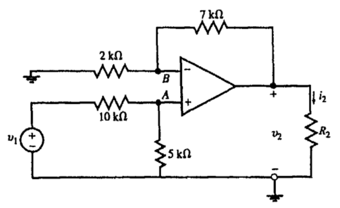
شكل 15–5

لإيجاد الكسب υ_2/υ_1 استخدم KCL عند العقدة B . لاحظ أن الطرفان A ، B كلاهما عند الجهد V_1 ومكبر العمليات لا يسحب تياراً .

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \qquad \text{or} \qquad \frac{v_2}{v_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \qquad (12)$$

الكسب υ_2/υ_1 يكون موجباً وأكبر أو يساوى واحد . وتكون مقاومة الدخل ما لا نهاية نظراً لأن المكبر لا يسحب تياراً .

مثـــال 5-11 : أوجد v_2/v_1 فى الدائرة المبينة شكل 5-16 .



شكل 5-16

أوجد أولاً v_A بتقسيم v_1 بين المقاومتين 10kΩ ، 5 kΩ .

$$v_A = \frac{5}{5+10} v_1 = \frac{1}{3} v_1$$

من المعادلة (12) نحصل على :

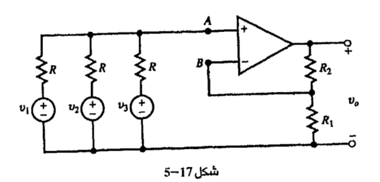
$$v_2 = \left(1 + \frac{7}{2}\right) v_A = \frac{9}{2} v_A = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3} v_1\right) = 1.5 v_1 \qquad \text{and} \qquad \frac{v_2}{v_1} = 1.5$$

طريقة أخرى.

أوجد v_B بتقسيم v_2 بين 2kΩ ، 7-kΩ وجعل $v_B = v_A$.

$$v_B = \frac{2}{2+7} v_2 = \frac{2}{9} v_2 = \frac{1}{3} v_1 \qquad \text{and} \qquad \frac{v_2}{v_1} = 1.5$$

مثـــال 5-12 : أوجد v_0 فى شكل 5-17 بدلالة v_1 ، v_2 ، v_3 وأيضاً عناصر الدائرة .



شكل 5-17

أولاً نوجد v_A بتطبيق KCL عند العقدة A .

$$\frac{v_1 - v_A}{R} + \frac{v_2 - v_A}{R} + \frac{v_3 - v_A}{R} = 0 \qquad \text{or} \qquad v_A = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \tag{13}$$

من المعادلتين (12) ، (13) نحصل على :

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_A = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)(v_1 + v_2 + v_3) \tag{14}$$

5.8 تابــع الجهــد :

مكبر التشغيل المبين فى الدائرة شكل 5-18(a) يعطى مكبراً ذو وحدة كسب والتى منها $v_2 = v_1$ حيث $v^+ = v^-$ ، $v_2 = v'$ ، $v_1 = v^+$ وجهد الخرج v_2 يتبع جهد الدخل v_1 . وبتغذية التيار i_1 للمقاومة R_1 فإن مكبر التشغيل يلغى تأثير المقاومة R_1 كحمل على جهد المنبع وهى لذلك تؤدى عمل المانع .

مثـــال 5-13 : (أ) أوجد i_s ، v_1 ، v_2 ، i_1 فى شكل 5-18(a) . (ب) قارن هذه النتائج مع تلك التى نحصل عليها حينما يكون المنبع والحمل متصلين مباشرة كما فى شكل 5-18(b) .

(أ) مع وجود مكبر التشغيل شكل 5-18(b) نحصل على :

$$i_s = 0 \qquad v_1 = v_s \qquad v_2 = v_1 = v_s \qquad i_l = v_s / R_l$$

لا يسحب مكبر التشغيل كتابع للجهد أى تيار من إشارة المنبع v_s . ولذلك فإن v_s تصل إلى الحمل بدون أى خفض يسببه تيار الحمل . ويغذى التيار فى المقاومة R_1 عن طريق مكبر التشغيل .

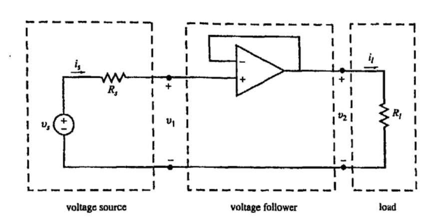
(ب) عند فصل مكبر التشغيل شكل 5-18(b) نحصل على :

$$i_s = i_l = \frac{v_s}{R_l + R_s} \qquad \text{and} \qquad v_1 = v_2 = \frac{R_l}{R_l + R_s} v_s$$

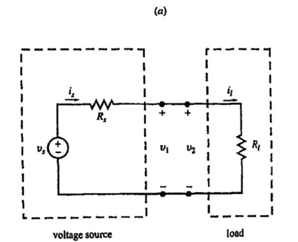
التيار المار فى المقاومة R_1 يمر أيضاً فى المقاومة R_s مسبباً خفضاً فى الجهد عليها . وبذلك يكون جهد الحمل v_2 معتمداً على R_1 .

5.9 المكبرات التفاضلية والفرقية

إشارة المنبع v_f التى ليس لها توصيلة بالأرض تسمى منبع غير مؤرض. مثل هذه الإشارة يمكن تكبيرها بالدائرة شكل 5-19.



(a)



(b)

شكل 5–18

شكل 5–19

هنا يكون طرفا الدخل A ، B لمكبر التشغيل لهما نفس الجهد. لذا عند استخدام KVL حول حلقة الدخل نحصل على :

$$v_f = 2R_1 i \qquad \text{or} \qquad i = v_f/2R_1$$

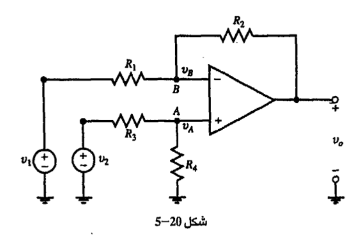
ولا يسحب دخل مكبر التشغيل أى تيار وبذلك يمر التيار i أيضاً فى المقاومة R_2. وباستخدام KVL حول مكبر التشغيل نحصل على :

$$v_o + R_2 i + R_2 i = 0 \qquad v_o = -2R_2 i = -2R_2 v_f/2R_1 = -(R_2/R_1)v_f \tag{15}$$

وفى الحالة الخاصة حينما يكون جهدا المنبعين v_1 ، v_2 الذين لهما توصيلة أرضى مشتركة متصلين بطرفى الدخل العاكس والغير عاكس للدائرة على الترتيب (انظر شكل 20-5) فإننا نحصل على :

$$v_o = (R_2/R_1)(v_2 - v_1) \tag{16}$$

مثـــال 14-5: أوجد الجهد v_0 كدالة للجهدين v_1 ، v_2 فى الدائرة المبينة شكل 20-5.



شكل 20–5

بتطبيق KCL عند العقدتين B ، A.

Node A:
$$\frac{v_A - v_2}{R_3} + \frac{v_A}{R_4} = 0$$

Node B:
$$\frac{v_B - v_1}{R_1} + \frac{v_B - v_o}{R_2} = 0$$

ضع $\upsilon_A = \upsilon_B$ واحذفهما من معادلة KCL السابقة نحصل على :

$$\upsilon_o = \frac{R_4(R_1+R_2)}{R_1(R_3+R_4)}\upsilon_2 - \frac{R_2}{R_1}\upsilon_1$$

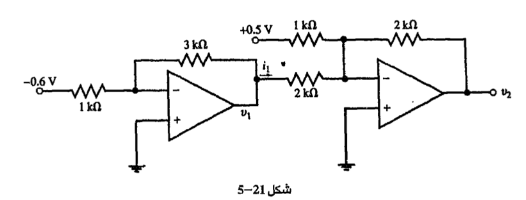
حينما $R_3 = R_1$ ، $R_2 = R_4$ فإن المعادلة (17) تؤول إلى (16) .

5.10 الدائرة المحتوية على عدد من مكبرات التشغيل

التحاليل والنتائج التى حصلنا عليها فى الدوائر المحتوية على مكبر تشغيل واحد يمكن تطبيقه أيضاً للدوائر المحتوية على عدة مكبرات للتشغيل متصلة بالتتابع أو على شكل حلقى لأنه لا تأثير للأحمال عليها .

مثـــال 5-15 : أوجد υ_1 ، υ_2 فى شكل 5-21 .

مكبر التشغيل الأول يعمل كعاكس



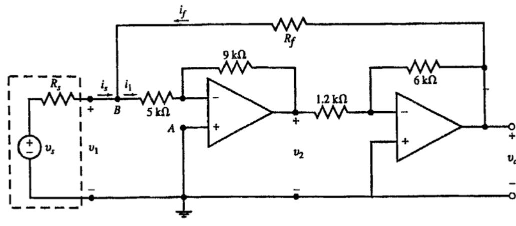
شكل 5–21

$$\upsilon_1 = -(3/1)(-0.6) = 1.8\ \text{V}$$

ومكبر التشغيل الثانى يعمل كجامع .

$$\upsilon_2 = -(2/1)(0.5) - (2/2)(1.8) = -2.8\ \text{V}$$

مثـــال 5-16 : افرض أن $R_s = 1k\Omega$ فى الدائـرة شكل (5-22) أوجـد i_l ، i_s ، υ_o ، υ_2 ، υ_l كدو للقيمة υ_s عند (أ) $R_f = \infty$ ، (ب) $R_f = 40k\Omega$.



شكل 22–5

(أ) عند $R_f = \infty$ كلا المكبران يعملان كعاكس ومتصلان بالتتابع ، ومع $\upsilon^+ = 0$ فإنه بتقسيم الجهد فى دائرة الدخل نحصل على :

$$v_1 = \frac{5}{5+1} v_s = \frac{5}{6} v_s \qquad (18)$$

ومن المكبرات العاكسة نحصل على :

$$v_2 = -(9/5)v_1 = -(9/5)\left(\frac{5}{6} v_s\right) = -1.5 v_s$$

$$v_o = -(6/1.2)v_2 = -5(-1.5 v_s) = 7.5 v_s$$

$$i_s = i_1 = \frac{v_s}{6000} \text{ (A)} = 0.166 v_s \text{ (mA)}$$

$$i_f = 0$$

(ب) عند $R_f = 40k\Omega$ ومن المكبرات العاكسة نحصل على $\upsilon_0 = -5\upsilon_2$ ، $\upsilon_2 = -(9/5)\ \upsilon_1$ وبالتالى $\upsilon_0 = 9\upsilon_1$ وبتطبيق KCL للتيارات الخارجة من العقدة B .

$$\frac{v_1 - v_s}{1} + \frac{v_1}{5} + \frac{v_1 - v_o}{40} = 0$$

وبتعويض $\upsilon_0 = 9\upsilon_1$ فى المعادلة (19) وباستخدام الجهد υ_1 نحصل على :

$$v_1 = v_s$$
$$v_2 = -(9/5)v_1 = -1.8 v_s$$
$$v_o = -(6/1.2)v_2 = -5(-1.8 v_s) = 9 v_s$$
$$i_s = \frac{v_s - v_1}{1000} = 0$$

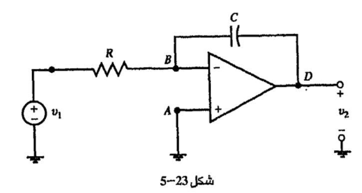
باستخدام KCL عند العقدة B فإن :

$$i_f = i_1 = \frac{v_1}{5000}\text{ (A)} = \frac{v_s}{5000}\text{ (A)} = 0.2v_s\text{ (mA)}$$

ويزود التيار i_1 المار فى المقاومة 5-kΩ لمكبر التشغيل الأول بخرج مكبر التشغيل الثانى من خلال مقاومة التغذية الخلفية 40kΩ وبالتالى يكون التيار i_s المسحوب من المنبع v_s صفراً وتكون مقاومة الدخل للدائرة ما لا نهاية .

5.11 دوائر التكامل والتفاضل :

باستبدال مقاومة التغذية الموجودة فى المكبر العاكس فى شكل 13-5 بمكثف فإننا نحصل على دائرة التكامل المبينة فى شكل 23-5 .



شكل 23–5

للحصول على علاقة بين الدخل والخرج نستخدم KCL عند العقدة العاكسة B .

$$\frac{v_1}{R} + C\frac{dv_2}{dt} = 0 \qquad \text{from which} \qquad \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{RC}v_1$$

and

$$v_2 = -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} v_1\, dt$$

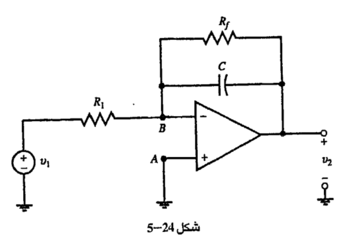
أى أن الخرج يكون مساوياً لتكامل الدخل مضروباً فى معامل الكسب -1/RC .

مثـــال 17-5 : إذا كان R = 1kΩ ، C = 1μF ، v_1 = sin 2000k فى شكل 23-5 باعتبار $v_2(0) = 0$ أوجد v_2 عند t > 0 .

$$v_2 = -\frac{1}{10^3 \times 10^{-6}}\int_0^t \sin 2000t\, dt = 0.5(\cos 2000t - 1)$$

المكامل المسرب

الدائرة المبينة شكل 5-24 تسمى بالمكامل المسرب نظراً لأن جهد المكثف يفرغ بصفة مستمرة من خلال مقاومة التغذية الخلفية R_f وهذا سوف يؤدى إلى نقص فى الكسب $|\upsilon_2/\upsilon_1|$ وإزاحة وجهيه فى υ_2 . راجع بند 5-13 للحصول على بيانات أكثر.



شكل 5-24

مثـــال 5-18 : فى شكل 5-24، $R_1 = R_f = 1k\Omega$ ، $C = 1\mu F$ ، $\upsilon_1 = \sin 2000\, t$. أوجد υ_2.

جهد العقدة العاكسة B تكون صفراً ومجموع التيارات الواصلة إليها يكون أيضاً صفراً وبالتالى :

$$\frac{v_1}{R_1} + C\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_f} = 0 \qquad \text{or} \qquad v_1 + 10^{-3}\frac{dv_2}{dt} + v_2 = 0$$

$$10^{-3}\frac{dv_2}{dt} + v_2 = -\sin 2000t \tag{21}$$

الحل للمعادلة (21) لإيجاد υ_2 هو موجة جيبية لها نفس تردد الجهد υ_1 ولكن بقيمة عظمى وزاوية وجه مختلفان أى أن :

$$v_2 = A\cos(2000t + B) \tag{22}$$

وللحصول على B ، A نعوض بقيم υ_2 ، $d\upsilon_2/dt$ التى فى (22) فى المعادلة (21) .

أولاً : $d\upsilon/dt = -2000\, A \sin(2000\, t + B)$ ولذلك :

$$10^{-3}\, dv_2/dt + v_2 = -2A\sin(2000t + B) + A\cos(2000t + B) = -\sin 2000t$$

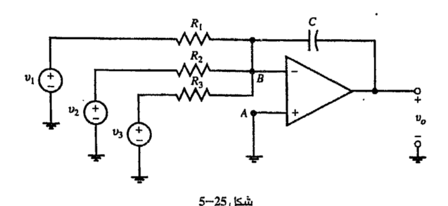
But $\qquad 2A\sin(2000t + B) - A\cos(2000t + B) = A\sqrt{5}\sin(2000t + B - 26.57^\circ) = \sin 2000t$

وبالتالى : $A = \sqrt{5}/5 = 0.447, B = 26.57°$

$$v_2 = 0.447 \cos(2000t + 26.57°) \qquad (23)$$

المكبر الجامع المكامل

يمكن لمكبر تشغيل واحد فى تشكيل عاكس مع خطوط دخل متعددة ومكثف تغذية خلفية كما هو مبين فى شكل 25-5 أن يعطى مجموع التكاملات لدوال الدخل متعددة بالكسب المطلوب.



شكل 25-5

مثـــال 19-5: أوجد جهد الخرج v_0 للمكبر الجامع المتكامل فى شكل 25-5 حيث تحتوى الدائرة على ثلاث دخول.

استخدم KCL عند الدخل العاكس لمكبر التشغيل للحصول على:

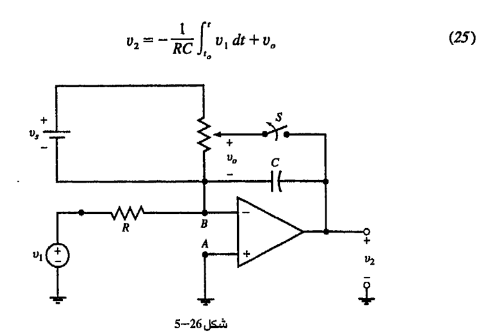
$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} + C\frac{dv_o}{dt} = 0$$

$$v_o = -\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{v_1}{R_1C} + \frac{v_2}{R_2C} + \frac{v_3}{R_3C}\right)dt$$

قيم الحالة الابتدائية للتكامل

يمكن تحديد الحالة الابتدائية للجهد v_0 فى التكامل باستخدام مفتاح توصيل يمكن فصله وتوصيله كما فى شكل 25-5. وإذا تم توصيل المفتاح لحظياً ثم فصله عند الزمن $t = t_0$ فإنه ستنتج قيمة ابتدائية للجهد v_0 على طرفى المكثف وتظهر عند جهد الخرج v_2. لقيم $t > t_0$ فإن التكامل الناتج من الدخل يضاف للخرج.

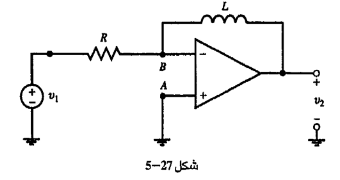
$$v_2 = -\frac{1}{RC}\int_{t_o}^{t} v_1\, dt + v_o \qquad (25)$$



شكل 5-26

المفاضـل

عند وضع عنصر حثى [ملف] فى مكان مقاومة مسار التغذية الخلفية لمكبر عكسى . فإن تفاضل إشارة الدخل ستظهر عند الخرج . يبين شكل 5-27 دائرة المفاضل الناتج .



شكل 5-27

للحصول على العلاقة بين الدخل والخرج تستخدم KCL للتيارات التى تصل إلى عقدة العاكسة .

$$\frac{v_1}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_2\, dt = 0 \qquad \text{or} \qquad v_2 = -\frac{L}{R}\frac{dv_1}{dt} \qquad (26)$$

5.12 الحاسبات التناظرية

تستخدم مكبرات التشغيل ودوائر التجميع والمكاملات المبينة فى البنود السابقة كأجزاء مكونة لبناء الحاسبات التناظرية الخاصة بحل المعادلات التفاضلية الخطية . ولكننا نتجنب استخدام المفاضلات لتأثير التشويش الواضح رغم قلة نسبته .

ولتصميم دائرة حاسبة نقوم أولاً بإعادة ترتيب المعادلة التفاضلية بحيث يكون الجزء التفاضلى ذو أعلى درجة للمتغير المطلوب فى أحد طرفى المعادلة وجميع الحدود الأخرى فى الطرف الآخر . ثم نبدأ بالتكامل الجامع لإجراء التكامل للمعادلة . ثم نضيف المكاملات والمكبرات التى على التوالى والتى فى الحلقات المغلقة كما هو مبين فى الأمثلة التالية . وفى هذا الجزء تستخدم الرموز التالية $x' = dx/dt$ ، $x'' = d^2x/dt^2$. وهكذا .

مثال 5-20 : صمم دائرة باعتبار $x(t)$ كدخل للحصول على الخرج $y(t)$ التى تحقق المعادلة التالية :

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = x(t) \qquad (27)$$

الخطوة 1 أعد ترتيب المعادلة التفاضلية (27) كالتالى :

$$y'' = x - 2y' - 3y \qquad (28)$$

الخطوة 2 تستخدم مكبر التشغيل الجامع المكامل #1 المبين شكل 5-28 لتكامل المعادلة (28) . استخدم المعادلة 24 لإيجاد كل من R_1 ، R_2 ، R_3 ، C_1 بحيث يكون خرج مكبر التشغيل #1 ، $v_1 = -y'$ وباعتبار $C_1 = 1\mu F$ تحسب المقاومات كالتالى :

$$\begin{array}{ll} R_1C_1 = 1 & R_1 = 1\,M\Omega \\ R_2C_1 = 1/3 & R_2 = 333\,k\Omega \\ R_3C_1 = 1/2 & R_3 = 500\,k\Omega \end{array}$$

$$v_1 = -\int (x - 3y - 2y')\,dt = -\int y''\,dt = -y' \qquad (29)$$

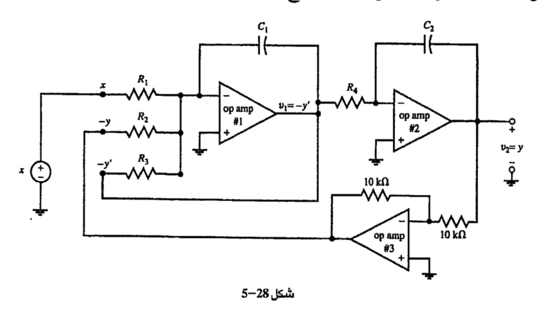
الخطوة 3 كامل $v_1 = -y'$ باستخدام مكبر التشغيل #2 للحصول على y . وبجعل $C_2 = 1\mu F$ ، $R_4 = 1M\Omega$ للحصول على $v_2 = y$ عند خرج مكبر التشغيل #2 .

$$v_2 = -\frac{1}{R_4C_2}\int v_1\,dt = \int y'\,dt = y \qquad (30)$$

الخطوة 4 . غذّ مكبر التشغيل #1 ثم بالدخول خلال التوصلات الآتية :

$\upsilon_2 = y'$ مباشرة إلى المقاومة R_3 إلى مكبر التشغيل #1

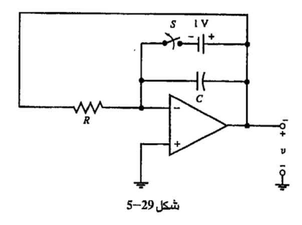
$\upsilon_2 = y$ خلال مكبر التشغيل العاكس #3 بكسب مساوياً للوحدة للحصول على y- ثم يغذى إلى مكبر التشغيل رقم #1 من خلال المقاومة R_2 . ثم بوصل جهد المنبع x(t) إلى مكبر التشغيل رقم #1 من خلال المقاومة R_1 . شكل (5-28) بوضع الدائرة الكاملة .



شكل 28–5

مثـــــال 5-21 : صمم دائرة مكبر تشغيل لمنبع مثالى للجهد $\upsilon(t)$ والتى تحقق المعادلة $\upsilon' + \upsilon = 0$ لقيم $t > 0$ باعتبار $\upsilon(0) = 1V$.

باتباع الخطوات المستخدمة فى مثال 5.20 فإنه يمكن تجميع الدائرة شكل 5-29 باعتبار $RC = 1s$ والقيمة الابتدائية تحسب عند فتح المفتاح عند $t = 0$. وحينئذ يبدو الحل عند خرج مكبر التشغيل زمن $t > 0$ هو $\upsilon(t) = e^{-t}$.



شكل 29–5

5.13 مرشح التردد المنخفض

يسمى مكبر الترددات الانتقائى الذى يتناقص كسبة من قيمة محدودة إلى الصفر حينما يزداد تردد دخل الموجة الجيبية من قيمة التيار المستمر (صفر) إلى ما لا نهاية بمرشح التردد المنخفض. يعرف الرسم البيانى للكسب والتردد بمجاوب التردد. وتوجد طريقة سهلة للحصول على مجاوب التردد للمرشحات سوف يبين فى فصل 13. والمكبر المسرب المبين فى شكل 5-24 هو أحد المرشحات ذو التردد المنخفض كما سيوضح فى المثال التالى:

مثـــال 5-22: فى مثال 5-18 ضع $\upsilon_1 = \sin \omega t$ ثم أوجد $|\upsilon_2|$ لقيم

$\omega = 0, 10, 100, 10^3, 10^4, 10^5$ rad/s

بتكرار الخطوات فى مثال 5-18 نوجد تجاوب التردد والمعطى بالجدول 5-1. حيث تقل قيمة التجاوب مع التردد وتكون الدائرة هى دائرة مرشح ذو تردد منخفض.

جـــدول 5-1

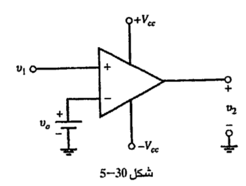
تجاوب التردد لمرشح التردد المنخفض

w, rad/s	0	10	100	10^3	10^3	10^3
f, Hz	0	1.59	1.59	159	1.59×10^3	1.59×10^3
$\lvert\upsilon 2/\upsilon 1\rvert$	1	1	0.995	0.707	0.1	0.01

5.14 المقـــارن

تقارن الدائرة المبينة فى شكل 5-30 الجهد υ_1 مع جهد المقارنة υ_0. وحيث أن كسب الدائرة المفتوحة يكون كبيراً جداً فإن خرج مكبر التشغيل υ_2 يكون إما عند $+V_{cc}$ (إذا كانت $\upsilon_1 > \upsilon_0$) أو $-V_{cc}$ (إذا كانت $\upsilon_1 < \upsilon_0$). وهذا مبين بالمعادلة $\upsilon_2 = V_{cc}$ sgn $[\upsilon_1 - \upsilon_0]$ حيث "sgn" تحل محل "الإشارة لـ" . . . . ولقيم $\upsilon_0 = 0$ نحصل على.

$$v_2 = V_{cc}\,\mathrm{sgn}[v_1] = \begin{cases} +V_{cc} & v_1 > 0 \\ -V_{cc} & v_1 < 0 \end{cases}$$



شكل 5-30

مثـــال 5-23: فـــى شـكل 5-30 إذا كانــت $V_{cc} = 5V$ ، $\upsilon_0 = 0$ ، $\upsilon_1 = \sin \omega t$ ، أوجـــد υ_2 عنـــد $0 < t < \pi/\omega$.

$$v_1 = \sin \omega t > 0 \qquad v_2 = 5\text{ V}$$

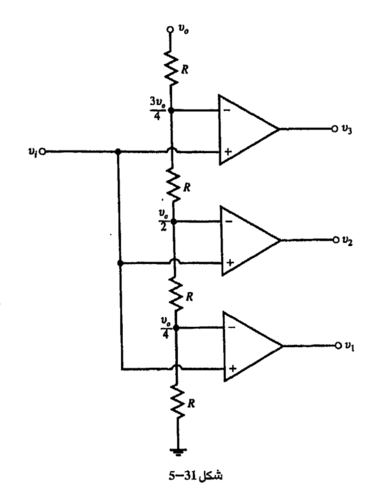
عند $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$

$$v_1 = \sin \omega t < 0 \qquad v_2 = -5\text{ V}$$

جهد الخرج υ_2 هى نبضة مربعة التى تظهر بين الجهدين $+5V$ ، $-5V$ لفترة $2\pi/\omega$. وموجة واحدة للجهد υ_2 تعطى بالعلاقة :

$$v_2 = \begin{cases} 5\text{ V} & 0 < t < \pi/\omega \\ -5\text{ V} & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

مثـــال 5-24: الدائرة المبينـــة شكل 5-31 تبين محـــول توازى من التناظـــرى إلى الرقـمى . والجهود $+V_{cc}$ ، $-V_{cc}$ قد حـــذفت للتبسـيط افـترض أن $V_{cc} = 5V$ ، $\upsilon_0 = 4V$ ، $\upsilon_i = t\ (V)$ لقيم $0 < t < 4s$. أوجد جهود الخرج υ_1 ، υ_2 ، υ_3 وفسر الإجابة .



شكل 5–31

مكبرات التشغيل ليس لها تغذية خلفية لذلك فهى تعمل كمقارنات جدول (2-5) يعطى الخرج لقيم +5V، -5V بينهم فى جدول 5-2 .

جـــدول 5-2

الخرج V	الدخل V	الزمن s
$v_3 = -5$ $v_2 = -5$ $v_1 = -5$	$0 < v_i < 1$	$0 < t < 1$
$v_3 = -5$ $v_2 = -5$ $v_1 = +5$	$1 < v_i < 2$	$1 < t < 2$
$v_3 = -5$ $v_2 = +5$ $v_1 = +5$	$2 < v_i < 3$	$2 < t < 3$
$v_3 = +5$ $v_2 = +5$ $v_1 = +5$	$3 < v_i < 4$	$3 < t < 4$

والقيم الثنائية المتعاقبة للجهود (υ_1 ، υ_2 ، υ_3) المبينة فى الجدول 2-5 تحدد بطريقة فريدة جهد الدخل فى حيز معين . ومع هذا فإنها بصورتها الحالية لا تكون الأرقام الثنائية التى تمثل قيم الدخل . ومن ثم فإنه باستخدام مشفر يمكن تحويل القيم المتعاقبة السابقة إلى أرقام ثنائية تمثل قيم الدخل التناظرية .

أمثلة محلولة

1-5 فى شكل 3-5 بفرض أن $\upsilon_s = 20V$ ، $R_s = 10\Omega$ ، $R_i = 990\Omega$ ، $k = 5$ ، $R_0 = 3\Omega$. أوجد (أ) مكافئ ثيفنين للدائرة المبينة من ناحية R_1 ، (ب) الجهد υ_2 والقدرة المستهلكة فى المقاومة R_L لقيم $R_L = 0.5, 1, 3, 5, 10, 100, 1000\Omega$.

(أ) جهد الدائرة المفتوحة وتيار القصر عند الطرفين A-B هما $\upsilon_{0.c} = 5\upsilon_1$ ، $i_{s.c.} = 5\upsilon_1/3$ على التوالى .

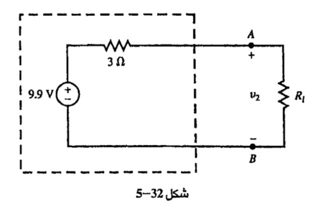
نوجد الجهد υ_1 بقسمة الجهد υ_2 بين المقاومتين R_s ، R_i ولذلك :

$$\upsilon_1 = \frac{R_i}{R_s + R_i}\upsilon_s = \frac{990}{10+990}(20) = 19.8 \text{ V}$$

ومنها

$$\upsilon_{o.c.} = 5(19.8) = 99 \text{ V} \qquad \upsilon_{Th} = \upsilon_{o.c.} = 99 \text{ V}$$
$$i_{s.c.} = 99/3 = 33 \text{ A} \qquad R_{Th} = \upsilon_{o.c.}/i_{s.c.} = 3\ \Omega$$

ومكافئ ثفنين كما هو مبين فى شكل 32-5 .



شكل 32–5

(ب) وعند توصيل الحمل R_l فإننا نحصل على :

$$\upsilon_2 = \frac{R_l}{R_l + R_{Th}} \upsilon_{Th} = \frac{99R_l}{R_l + 3} \qquad \text{and} \qquad p = \frac{\upsilon_2^2}{R_l}$$

جدول 3-5 يبين الجهد على طرفى الحمل والقدرة المستهلكة فيه لقيم المقاومة R_L السبعة . ويصل جهد الحمل إلى قيمته العظمى حينما تكون R_l تساوى ما لا نهاية . ومع هذا فإن القدرة المعطاة للمقاومة $R_L = \infty$ تكون صفراً . والقيمة العظمى للقدرة المعطاة للمقاومة R_L تكون عند القيمة $R_l = 3\Omega$ والتى تكون مساوية لمقاومة خرج المكبر .

جـــدول 3-5

R_l, Ω	υ_2, V	p, W
0.5	14.14	400.04
1	24.75	612.56
3	49.50	816.75
5	61.88	765.70
10	76.15	579.94
100	96.12	92.38
1000	98.70	9.74

2-5 فى الدوائر المبينة فى شكلى 4-5 ، 5-5 ضع $R_1 = 1k\Omega$ ، $R_2 = 5k\Omega$. أوجد الكسب $G^- = \upsilon_2/\upsilon_s$ فى شكل 4-5 والكسب $G^- = \upsilon_2/\upsilon_s$ فى شكل 5-5 لقيم $k = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1000, \infty$ وقارن النتائج .

من المعادلة رقم (5) فى مثال 3-5 عند $R_1 = 1k\Omega$ ، $R_2 = 5k\Omega$ ونحصل على :

$$G^+ = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_s} = \frac{5k}{6-k} \qquad (31)$$

فى مثال 4-5 وجدنا أن :

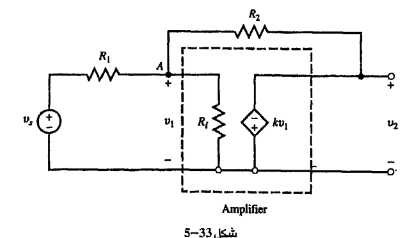
$$G^- = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_s} = -\frac{5k}{6+k} \qquad (32)$$

جدول 5-4 يبين قيم الكسب G^- ، G^+ المحسوبة لقيم k التسعة . وحينما تصبح k كبيرة جداً فإن قيمتى G^+ ، G^- تقتربان من حد الكسب وهو 5- وهى القيمة السالبة للنسبة R_2/R_1 والتى لا تعتمد على قيمة k . والدائرة المبينة شكل 5-5 (ذات التغذية الخلفية السالبة) تكون دائماً مستقرة ويقترب كسبها من حد الكسب . ومع هذا فإن الدائرة المبينة شكل 5-4 (ذات التغذية الخلفية الموجبة) تكون غير مستقرة . ويصبح الكسب G^+ كبيراً جداً كلما اقتربت قيمة k من القيمة 6 . لاحظ أنه عند $k = 6$ ، $G^+ = \infty$.

جـــدول 5-4

k	G^+	G^-
1	1.0	-0.71
3	2.5	-1.25
4	10.0	-2.00
6	∞	-2.50
8	-20.0	-2.86
10	-12.5	-3.13
100	-5.32	-4.72
1000	-5.03	-4.97
∞	-5.00	-5.00

5-3 لقيم $R_1 = 1k\Omega$ ، $R_2 = 5k\Omega$ ، $R_i = 50k\Omega$ فى الدائـرة المبينة شكل 5-33 . أوجـد v_2/v_s لقيـم $k = 1, 10, 100, 1000, \infty$ وقارن النتائج مع قيم G^- فى جدول 5-4 .



شكل 5–33

تحل هذه المسألة بتطبيق KCL عند العقدة A (هناك طريقة أخرى باستخدام مكافئ ثفنين فى المسألة رقم 5-30) وبهذا :

$$\frac{v_1 - v_s}{1} + \frac{v_1 - v_2}{5} + \frac{v_1}{50} = 0 \qquad (33)$$

ومن المكبر نحصل على :

$$v_2 = -kv_1 \qquad \text{or} \qquad v_1 = -v_2/k \qquad (34)$$

وبتعويض v_1 من المعادلة (34) فى المعادلة (33) وبترتيب الحدود نحصل على :

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-50k}{61 + 10k} = \frac{-5k}{6.1 + k} \qquad (35)$$

ويبين جدول 5-5 قيم v_2/v_s من المعادلة (35) كدالة لقيم k . وتقلل مقاومة الدخل للمكبر $50k\Omega$ الكسب الكلى بقيم صغيرة جداً كما يبدو عند مقارنة الجدولين 5-4 ، 5-5 . وقد تسببت التغذية الخلفية فى تقليل تأثير مقاومة الدخل للمكبر على تغيير الكسب الكلى .

جـــدول 5-5

k	v_2/v_1
1	- 0.704
10	- 3.106
100	- 4.713
1000	- 4.97
∞	- 5.00

5-4 إذا كان $R_1 = 1\ k\Omega$ ، $R_2 = 5\ k\Omega$ مرة أخرى فى الدائرة المبينة شكل 5-33 .

(أ) أوجد v_2/v_s كدالة فى k ، R_i .

(ب) إذا كان $R_i = 1\ k\Omega$. أوجد v_2/v_1 لقيم $k = 1, 10, 100, 1000, \infty$ وكرر لقيم $R_i = \infty$.

(جـ) ناقش تأثيرات كلا من R_i ، k على الكسب الكلى . وبين أنه عند $k = \infty$ ، $R_i \neq 0$ فإن كسب المكبر لا يتوقف على R_i ويساوى $-R_2/R_1$.

(أ) استخدم KCL للتيارات الخارجة من العقدة A للحصول على :

$$\frac{v_1 - v_s}{1} + \frac{v_1 - v_2}{5} + \frac{v_1}{R_i} = 0$$

ونحصل من المكبر $v_2 = -kv_1$ أو $v_1 = -v_2/k$. وبالتعويض بقيمة v_1 فى معادلة KCL ثم بترتيب الحدود نحصل على :

$$\frac{v_2}{v_s} = -5\frac{ck}{1+ck} \qquad \text{where } c = \frac{R_i}{5+6R_i} \tag{36}$$

(ب) لقيمة $R_i = 1\ k\Omega$ ، $c = 1/11$ والتى نعوض عنها فى معادلة (36) نحصل على :

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-5k}{11+k} \tag{37}$$

ولقيمة $R_i = \infty$ نحصل على $c = 1/6$ ومنها :

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-5k}{6+k} \tag{38}$$

الجدول 6-5 يعطى قيم v_2/v_1 فى المعادلة (37) وفى المعادلة (38) لقيم k . لاحظ أن المعادلة (38) متطابقة مع (32) .

جـــدول 6-5

k	v_2/v_s	
	$R_i = 1\ k\Omega$	$R_i = \infty$
1	- 0.31	- 0.71
10	- 2.38	- 3.12
100	- 4.51	- 4.72
1000	- 4.95	- 4.97
∞	- 5.00	- 5.00

(جـ) بمقارنة العمودين فى جدول 6-5 نلاحظ إنه كلما صغرت المقاومة R_i كلما قل الكسب الكلى G . مع هذا فإنه كلما زاد كسب الدائرة المفتوحة k قل تأثير المقاومة R_i وحينما تصبح k كبيرة جداً فإن v_2/v_1 تقترب من 5- فيما عدا إذا كانت $R_i = 0$.

5-5 إذا كانت $R_1 = 1\ k\Omega$ ، $R_2 = 5\ k\Omega$ مرة أخرى فى الدائرة المبينة شكل 33-5 . استبدل الدائرة على يسار A المحتوية على υ_s ، R_1 ، R_i بمكافئ ثفنين لها . ثم استخدم المعادلة (5) للحصول على المعادلة (36) .

يكون مكافئ ثفنين .

$$\upsilon_{Th} = \frac{R_i \upsilon_s}{R_1 + R_i} = \frac{R_i \upsilon_s}{1 + R_i}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_i}{R_1 + R_i} = \frac{R_i}{1 + R_i}$$

حيث تكون المقاومات بالكيلو أوم . ومن المعادلة 5 .

$$\upsilon_2 = (1 - b)\frac{-k}{1 + bk}\upsilon_{Th}$$

حيث

$$b = \frac{R_{Th}}{R_{Th} + R_2} = \frac{R_i}{6R_i + 5} \qquad \text{and} \qquad 1 - b = \frac{5(1 + R_i)}{6R_i + 5}$$

ولذلك

$$\upsilon_2 = \frac{5(1 + R_i)}{6R_i + 5} \times \frac{-k}{1 + R_i k/(6R_i + 5)} \times \frac{R_i}{1 + R_i}\upsilon_s = \frac{-5R_i k}{6R_i + 5 + R_i k}\upsilon_s$$

وهى مطابقة للمعادلة رقم (36) .

6-5 أوجد جهد الخرج لمكبر تشغيل حيث $A = 10^5$ ، $V_{cc} = 10V$ لقيم $\upsilon^- = 0$ ، $\upsilon^+ = \sin t(V)$ إرجع إلى شكل 7-5 وشكل 8-5 .

يحدث التشبع سريعاً بسبب الكسب العالى .

$$|\upsilon_2| = 10^5|\upsilon_d| = 10\ \text{V} \qquad \text{or} \qquad |\upsilon_d| = 10^{-4}\ \text{V}$$

يمكن إهمال الفترة الخطية واستنتاج ما يلى :

$$\upsilon_2 = \begin{cases} +10\ \text{V} & \upsilon_d > 0 \\ -10\ \text{V} & \upsilon_d < 0 \end{cases}$$

حيث $\upsilon_d = \upsilon^+ - \upsilon^- = \sin t\ (V)$ وتكون الدورة الواحدة للخرج كالتالى :

$$\upsilon_2 = \begin{cases} +10\ \text{V} & 0 < t < \pi \\ -10\ \text{V} & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

للحصول على قيم υ_2 الحقيقية نستخدم خواص التحويل لمكبر التشغيل فى شكل 5-7 .

$$\upsilon_2 = \begin{cases} -10 & \upsilon_d < -10^{-4}\ \text{V} \\ 10^5 \upsilon_d & -10^{-4} < \upsilon_d < 10^{-4}\ \text{V} \\ +10 & \upsilon_d > 10^{-4}\ \text{V} \end{cases}$$

يبدأ التشبع عند $|\upsilon_d| = |\sin t| = 10^{-4}$ V حيث أن ذلك يشمل فترة صغيرة جداً فإننا يمكن استبدال sin t بالقيمة t ويكون جهد الخرج υ_2 كالتالى :

$$\begin{aligned} &\upsilon_2 = 10^5 t && -10^{-4} < t < 10^{-4}\ \text{s} \\ &\upsilon_2 = 10 && 10^{-4} < t < \pi - 10^{-4}\ \text{s} \\ &\upsilon_2 = -10^5(t-\pi) && \pi - 10^{-4} < t < \pi + 10^{-4}\ \text{s} \\ &\upsilon_2 = -10 && \pi + 10^{-4} < t < 2\pi - 10^{-4}\ \text{s} \end{aligned}$$

لتقدير الخطأ الطفيف عند إهمال المرحلة الخطية لاحظ أنه أثناء فترة واحدة 2π s فإن المرحلة الخطية هى فقط 4×10^{-4} s التى تعطى النسبة 64×10^{-6} .

5-7 أعد حل المسألة 5-6 لقيم $\upsilon^+ = \sin 2\pi t$ (V) ، $\upsilon^- = 0.5$.

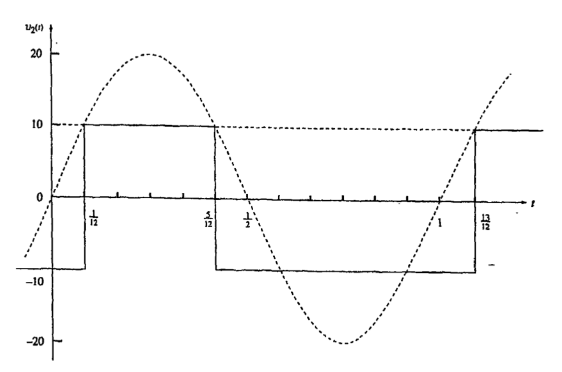
جهد الخرج يكون :

$$\begin{aligned} &\upsilon_2 = 10\ \text{V} && \text{when } \upsilon^+ > \upsilon^- \\ &\upsilon_2 = -10\ \text{V} && \text{when } \upsilon^+ < \upsilon^- \end{aligned}$$

يحدث التشبع عند $\sin 2\pi t = 1/2$ ويحدث عند $t = 1/12$ ، 5/12 ، 13/12 ، وهكذا. ولذلك فإن ذبذبة واحدة للجهد υ_2 تعطى بالقيم :

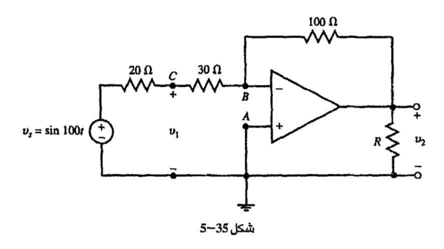
$$\begin{aligned} &\upsilon_2 = 10\ \text{V} && 1/12 < t < 5/12\ \text{s} \\ &\upsilon_2 = -10\ \text{V} && 5/12 < t < 13/12\ \text{s} \end{aligned}$$

شكل 5-34 يبين رسماً للجهود υ^+ ، υ^- ، υ_2 .



شكل 5–34

5-8 فى الدائرة المبينة شكل 5-35 . $\upsilon_s = \sin 100t$ أوجد υ_1 ، υ_2 .



شكل 5–35

عند العقدتين A ، B $\upsilon_B = \upsilon_A = 0$ ولذلك ،

$$v_1 = \frac{30}{20+30} v_s = 0.6 \sin 100t \text{ (V)}$$

$$v_2 = -\frac{100}{30} v_1 = -\frac{100}{30} (0.6 \sin 100t) = -2 \sin 100t \text{ (V)}$$

$$v_2 = -\frac{100}{20+30} v_s = -2 \sin 100t \text{ (V)}$$

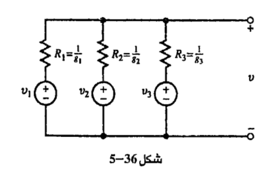
5-9 مستويا التشبع لمكبر التشغيل فى شكل 5.31 هما $+V_{cc} = 5V$ ، $-V_{cc} = -5V$. جهد المقارنة هو $\upsilon_0 = 1V$. أوجد تعاقب الخرج المناظر لقيم υ_i من 0 إلى 1 V بخطوة مقدارها 0.25V .

راجع جدول 5-7 حيث $L = -5V$ ، $H = +5V$.

جـــدول 5-7

υ_i, V	υ_3	υ_2	υ_1
0 to 0.25-	L	L	L
0.25^+ to 0.5^-	L	L	H
0.5^+ to 0.75^-	L	H	H
0.75^+ to 1	H	H	H

5-10 أوجد الجهد υ فى الدائرة المبينة شكل 5-36 .



شكل 5-36

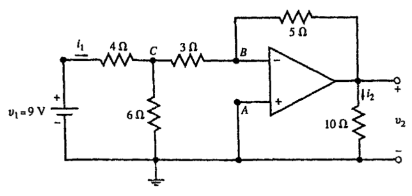
بتطبيق KCL عند العقدة A فإن :

$$(\upsilon - \upsilon_1)g_1 + (\upsilon - \upsilon_2)g_2 + (\upsilon - \upsilon_3)g_3 = 0$$

وبالتالى

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 g_1 + \upsilon_2 g_2 + \upsilon_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{\upsilon_1 R_2 R_3 + \upsilon_2 R_1 R_3 + \upsilon_3 R_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

5-11 فى الدائرة المبينة شكل 5-37 أوجد υ_C (وهو الجهد عند العقدة C)، i_1 ، R_{in} (مقاومة الدخل من ناحية جهد المنبع 9-V) و υ_2 ، i_2



شكل 5-37

عند العقدتين A ، B : $\upsilon_B = \upsilon_A = 0$. وبتطبيق KCL عند العقدة C نحصل على :

$$(v_C - 9)/4 + v_C/6 + v_C/3 = 0 \qquad \text{from which} \qquad v_C = 3\text{ V}$$

Then $\qquad i_1 = (9 - v_C)/4 = 1.5\text{ A} \qquad$ and $\qquad R_{in} = v_1/i_1 = 9/1.5 = 6\,\Omega$

من دائرة مكبر العاكس نحصل على :

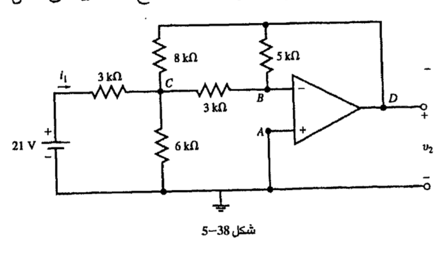
$$v_2 = -(5/3)v_C = -5\text{ V} \qquad \text{and} \qquad i_2 = -5/10 = -0.5\text{ A}$$

5-12 أوجد υ_2 فى المسألة (5.11) باستبدال الدائرة على يسار العقدتين A ، B فى شكل 5-37 بمكافئ ثفنين .

$$R_{Th} = 3 + \frac{(6)(4)}{6+4} = 5.4\,\Omega \qquad \text{and} \qquad v_{Th} = \frac{6}{4+6}(9) = 5.4\text{ V}$$

Then $v_2 = -(5/5.4)(5.4) = -5$ V.

5-13 أوجد υ_c ، υ_1 ، υ_2 ومقاومة الدخل R_{in} من ناحية جهد المنبع 21V المبينة فى شكل 5-38 .



شكل 5-38

من المكبر العاكس نحصل على :

$$v_2 = -(5/3)v_C \quad (39)$$

نلاحظ أن $v_B = v_A = 0$ وبذلك يكون KCL عند العقدة C

$$\frac{v_C - 21}{3} + \frac{v_C}{6} + \frac{v_C}{3} + \frac{v_C - v_2}{8} = 0 \quad (40)$$

بالتعويض $v_c = -(3/5)\, v_2$ من المعادلة (39) فى المعادلة (40) نحصل على $v_2 = -10V$ ومن ثم :

$$v_C = 6\text{ V}$$
$$i_1 = (21 - v_C)/3000 = 0.005\text{ A} = 5\text{ mA}$$
$$R_{in} = 21/i_1 = 21/0.005 = 4200\ \Omega = 4.2\text{ k}\Omega$$

5-14 فى الدائرة المبينة شكل 38-5 غير المنبع 21V بالمعامل k . بين أن قيم v_c، v_1، v_2 فى المسألة رقم 5-13 تتغير بنفس المعامل ولكن R_{in} تبقى بدون تغيير .

الجهد $v_2 = 21\text{ k(V)}$ يمثل جهد المنبع الجديد ومن مكبر العاكس نحصل على (انظر 39) .

$$v_2 = -(5/3)v_C$$

باستخدام KCL نحصل على (انظر المعادلة رقم 40) .

$$\frac{v_C - v_s}{3} + \frac{v_C}{6} + \frac{v_C}{3} + \frac{v_C - v_2}{8} = 0$$

وبالحل لقيم v_c، v_2 نحصل على :

$$v_C = (6/21)v_s = 6k\text{ (V)} \quad \text{and} \quad v_2 = -(10/21)v_s = -10k\text{ (V)}$$
$$i_1 = (v_s - v_C)/3000 = (21 - 6)k/3000 = 0.005k\text{ A}$$
$$R_{in} = v_s/i_1 = 21k/0.005k = 4200\ \Omega$$

وهذه النتائج متوقعة نظراً لأن الدائرة خطية .

5-15 أوجد υ_c ، υ_2 فى المسألة رقم 5-13 باستبدال الدائرة التى على يسار العقدة C فى شكل 5-38 (متضمناً البطارية 21V، المقاومتان 3-kΩ ، 6kΩ) بمكافئ ثفنين .

يحسب أولاً مكافئ ثفنين :

$$R_{Th} = \frac{(6)(3)}{6+3} = 2\ \text{k}\Omega \qquad \text{and} \qquad \upsilon_{Th} = \frac{6}{3+6}(21) = 14\ \text{V}$$

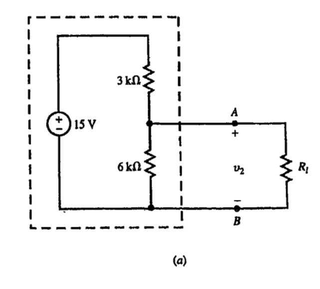
استبدل الدائرة على يسار العقدة C بقيم υ_{th} ، R_{th} السابقة ثم استخدم KCL عند C .

$$\frac{\upsilon_C - 14}{2} + \frac{\upsilon_C}{3} + \frac{\upsilon_C - \upsilon_2}{8} = 0$$

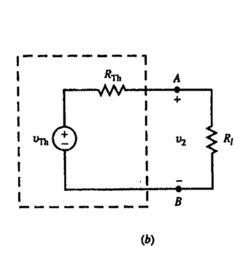
من المكبر العاكس نحصل على $\upsilon_2 = -(5/3)\ \upsilon_c$ أو $\upsilon_c = -0.6\ \upsilon_2$ التى تنتج بعد التعويض فى (41) بالقيم $\upsilon_2 = -10\text{V}$ ، $\upsilon_c = 6\text{V}$.

5-16 (أ) أوجد مكافئ ثفنين فى الدائرة التى على يسار العقدتين A-B فى شكل 5-39(a) ثم أوجد υ_2 لقيم $R_L = 1\ \text{k}\Omega, 10\ \text{k}\Omega, \infty$. (ب) أعد الحل لشكل 5-39(c) وقارن بالجزء (أ) .

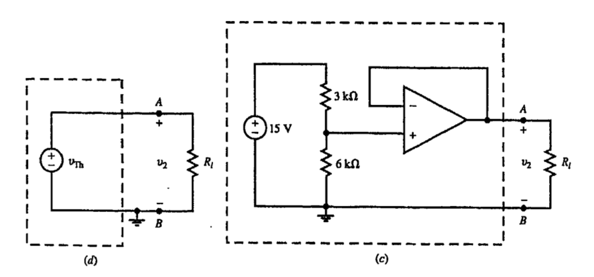
(أ) مكافئ ثفنين للدائرة شكل 5-39(a) مُوضح فى شكل 5-39(b) .



(a)



(b)



شكل 39–5

بتقسيم الجهد v_{th} بين R_{th} ، R_L نحصل على :

$$v_{Th} = \frac{6}{6+3}(15) = 10\text{ V} \qquad \text{and} \qquad R_{Th} = \frac{(3)(6)}{3+6} = 2\text{ k}\Omega$$

By dividing v_{Th} between R_{Th} and R_l we get

$$v_2 = \frac{R_l}{R_l+2}(10)$$

For $R_l = 1$ kΩ, $v_2 = 3.33$ V
For $R_l = 10$ kΩ, $v_2 = 8.33$ V
For $R_l = \infty$ $v_2 = 10$ V

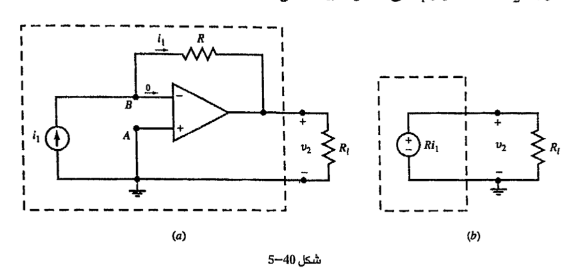
ويعتمد جهد الخرج v_2 على المقاومة R_L ويتأثر أداء مجزئ الجهد بالمقاومة R_1 .

(ب) مكافئ ثفنين للدائرة التى فى شكل 5-39(c) مبين فى شكل 5-12(d) وهنا نحصل على :

$$v_{Th} = 10\text{ V} \qquad \text{and} \qquad R_{Th} = 0$$

وأيضاً تكون $v_2 = v_{th} = 10V$ لجميع قيم R_L ويكون جهد الخرج v_2 معتمداً فقط على R_1 ، R_2 ، v_s وغير متوقف على قيمة R_L .

5-17 أوجد υ_2 كدالة للتيار i_1 فى الدائرة المبينة شكل 5-40(a) .



شكل 40–5

يسرى التيار i_1 خلال المقاومة R وينشأ عنه الجهد $-Ri_1$ على طرفيها من اليمين إلى اليسار . وحيث أن الطرف العاكس B جهده يساوى صفراً فإن الجهد السابق يظهر عند الخرج بقيمة $\upsilon_2 = -Ri_1$ [انظر شكل 5-40(b)] ولذلك فإن مكبر التشغيل يحول التيار i_1 إلى الجهد υ_2 بكسب قيمته $|\upsilon_2/i_1| = R$. ولا يعطى تيار المنبع i_1 أى قدرة لأن الجهد υ_{AB} على طرفيه يساوى صفراً .

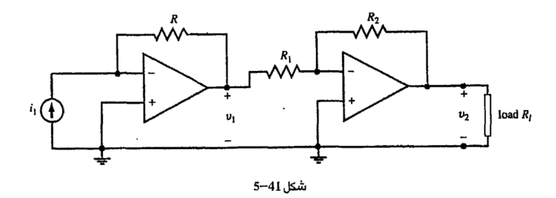
5-18 محول طاقة يولد تياراً ضعيفاً i_1 الذى يقوم بتغذية الحمل R_L منتجاً جهداً υ_1 على طرفيه . والمطلوب أن يكون الجهد υ_1 تابعاً الإشارة بكسب ثابت قيمته 10^8 بغض النظر عن قيمة R_L . صمم محول تيار – جهد لأداء هذا العرض .

يجب أن يغذى محول الطاقة R_L بطريقة غير مباشرة من خلال مكبر التشغيل . والتصميمات التالية ينتج عنها قيم $\upsilon_1 = 10^8\ i_1$ وهى غير متوقفة على قيمة R_L .

التصميم 1 : نختار $R = 100\ M\Omega$ فى شكل 5-40 ومع هذا فإن المقاومة ذات القيمة العالية تكون غالية الثمن ويصعب توفرها فى الأسواق .

التصميم 2 : نحصل أيضاً على كسب التحويل الذى قيمته $10^8 V/A$ فى الدائرة المبينة شكل 5-41 . ويحول مكبر التشغيل الأول ذو المقاومة $R=10^6$ التيار i_1 إلى الجهد $\upsilon_1 = -10^6\ i_1$. ويكبر المكبر الثانى ذو الكسب 100 – (كمثال $R_1 = 1\ k\Omega$ ، $R_2 = 100\ k\Omega$) الجهد υ_1

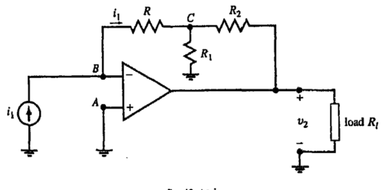
للجهـد i_1 10^8 = υ_1 100- = υ_2 . وتحتـاج الدائـرة إلى مكبرى تشغيـل وثـلاث مقاومـات (1 MΩ ، 100 kΩ ، 1 kΩ) التى تكون أقل تكلفة وأكثر احتمالاً لتواجدها فى السوق .



شكل 5-41

التصميم 3 : انظر شكل 5-42 والمسألة 5-19 .

5-19 أوجد قيم المقاومات التى ينتج عنها كسب تحويل تيار إلى جهد بالقيمة $\upsilon_2/i_1 = 10^8$ V/A فى الدائرة المبينة شكل 5-42 .



شكل 5-42

استخدم KCL عند العقدة C . لاحظ أن $\upsilon_B = \upsilon_A = 0$ لذلك :

$$\frac{v_C}{R} + \frac{v_C}{R_1} + \frac{v_C - v_2}{R_2} = 0$$

بتعويض $\upsilon_c = Ri_1$ والحل لإيجاد υ_2 نحصل على :

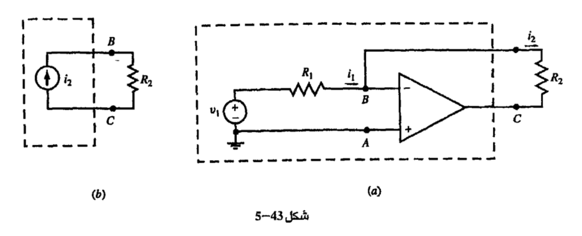
$$v_2 = -R_{eq} i_1 \qquad \text{where } R_{eq} = R\left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R}\right)$$

وللحصول على كسب تحويل $\upsilon_2/i_1 = R_{eq} = 10^8$ V/A = 100 MΩ نحتاج لمقاومة ذو قيمة تحقق المعادلة التالية :

$$R\left(1+\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_2}{R}\right)=10^8\ \Omega$$

أحد الحلول هو اختيار R = 1 MΩ ، R_1 = 1 kΩ ، R_2 = 99 kΩ والتصميم المبين فى شكل 5-42 يستخدم مكبر تشغيل واحد وثلاث مقاومات التى لا تكون غالية الثمن ويمكن تواجدها .

5-20 أوجد i_2 كدالة فى الجهد υ_1 فى الدائرة المبينة شكل 5-43 .



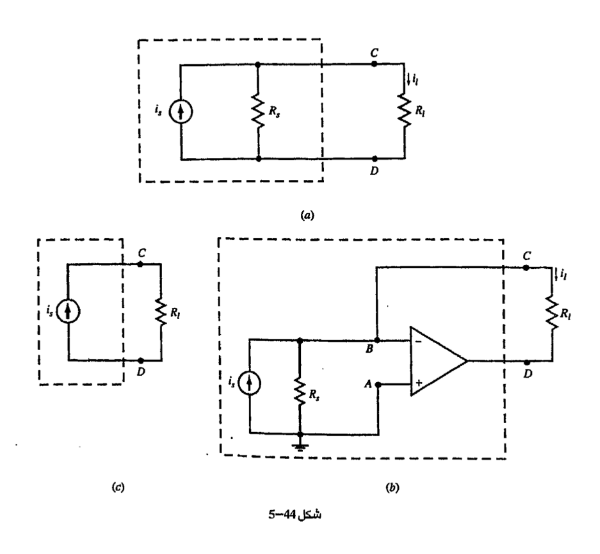
شكل 5-43

لدينا

$$v_B = v_A = 0 \qquad i_1 = v_1/R_1 \qquad i_2 = i_1 = v_1/R_1$$

يحول مكبر التشغيل منبع الجهد إلى منبع تيار حر . ونسبة تحويل الجهد إلى تيار هى R_1 وتكون غير متوقفة على المقاومة R_2 .

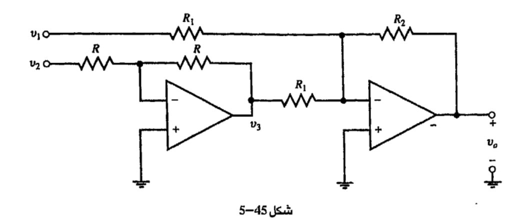
5-21 يقوم منبع تيار حقيقى (i_2 على التوازى مع مقاومة داخلية R_s) مباشرة بتغذية حملا R_L كما فى شكل 5-44(a) . (أ) أوجد تيار الحمل i_L . (ب) ضع مكبر تشغيل بين المنبع والحمل كما فى شكل 5-44(b) . أوجد i_L وقارن مع الجزء (a) .



شكل 44–5

(أ) عند التوصيل المباشر كما فى شكل (a) 5-44 نجد أن : $i_l = i_s R_s / (R_s + R_l)$ حيث يتغير مع R_l . (ب) فى شكل (b)5-44 يجعل مكبر التشغيل الجهد υ_B صفراً والذى يتسبب عنه أن يكون التيار فى المقاومة R_s صفراً. ولذلك فإن $i_l = i_s$ والتى لا تعتمد على المقاومة R_l . وتقوم دائرة مكبر التشغيل بتحويل منبع التيار الحقيقى إلى منبع تيار مثالى. انظر شكل (c) 5-44 .

5-22 أوجد υ_0 فى الدائرة المبينة شكل 5-45 .



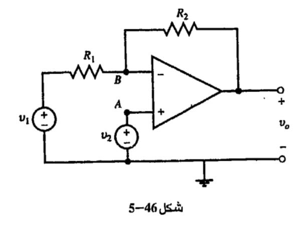
شكل 45–5

مكبر التشغيل الأول هو محول ذو كسب قيمته الوحدة مع $v_3 = v_2$ ومكبر التشغيل الثانى هى دائرة تجميع ذات كسب قيمته $-R_2/R_1$ لكلا الدخلين v_1، v_2 ويكون الخرج :

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1}(v_1 + v_3) = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$$

الدائرة هى مكبر فرقى.

5-23 أوجد v_0 فى الدائرة المبينة شكل 46-5.



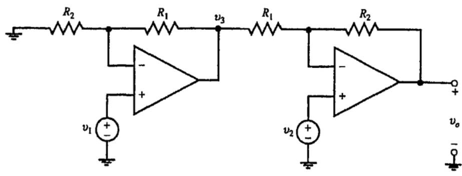
شكل 46–5

استخدم KCL عند العقدة B. لاحظ أن $v_B = v_A = v_2$ لذلك :

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2 - v_o}{R_2} = 0$$

وبالحل لإيجاد v_0 نحصل على $v_0 = v_2 + (R_2 / R_1)(v_2 - v_1)$.

5-24 أوجد v_0 فى الدائرة المبينة شكل 5-47 .

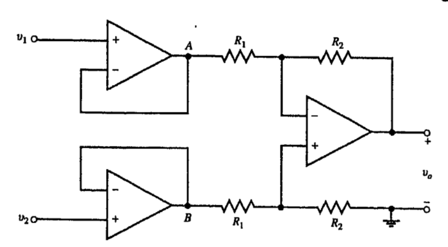


شكل 47–5

الجزء الأيسر من الدائرة ذو كسب قيمته $(1 + R_1/R_2)$. لذلك $v_3 = (1 + R_1/R_2)\, v_1$ باستخدام النتائج فى المسألة 23-5 وبالتعويض لقيم v_3 ينتج :

$$v_o = v_2 + \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_3) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_2 - \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)v_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)(v_2 - v_1)$$

5-25 فى شكل 48-5 اختار المقاومات لكسب تفاضلى قيمته 10^6 ليكون $v_0 = 10^6\,(v_2 - v_1)$.



شكل 48–5

مكبرا التشغيل الأماميان هما متابعان للجهد .

$$v_A = v_1 \qquad \text{and} \qquad v_B = v_2$$

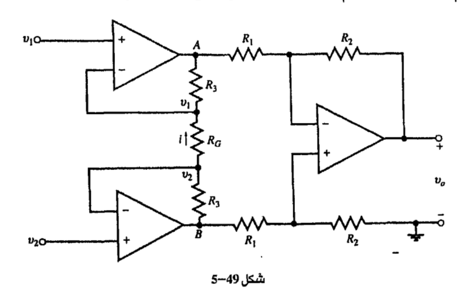
من المعادلة (16) فى البند رقم 9-5 نجد أن :

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_B - v_A) = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$$

وللحصول على الكسب التفاضلى $R_2/R_1 = 10^6$ نختار $R_1 = 100\ \Omega$ ، $R_2 = 100\ M\Omega$.

الدائرة المبينة شكل 48-5 يمكن أن يكون لهـا نفس الكسب كـالتى فى شكل 45-5 ولكن تكون مقاومة الدخل ما لا نهاية . ومع هذا فهى تستخدم مقاومتين صغيرتين ومقاومتين كبيرتين حيث تخرجان عن النطاق المألوف .

26-5 المقاومات ذات القيم العالية والدقة تكون غالية . بين أنه فى الدائرة المبينة شكل 49-5 نستطيع استخدام مقاومات ذات قيم مألوفة بحيث أن $\upsilon_0 = 10^6 (\upsilon_2 - \upsilon_1)$.



شكل 49-5

مكبرا التشغيل الأماميان يحولان جهدى الدخل υ_1 ، υ_2 إلى طرفى المقاومة R_G الذى ينشأ عنه تيار لأعلى $i = (\upsilon_2 - \upsilon_1) / R_G$ فى المقاومة ويمر التيار أيضاً خلال المقاومتين R_3 التى ينشأ عنه الفقد فى الجهد iR_3 خلالهما ولذلك :

$$v_A = v_1 - R_3 i = v_1 - \frac{R_3}{R_G}(v_2 - v_1) \qquad v_B = v_2 + R_3 i = v_2 + \frac{R_3}{R_G}(v_2 - v_1)$$

$$v_B - v_A = \left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right)(v_2 - v_1)$$

and

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_B - v_A) = \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right)(v_2 - v_1)$$

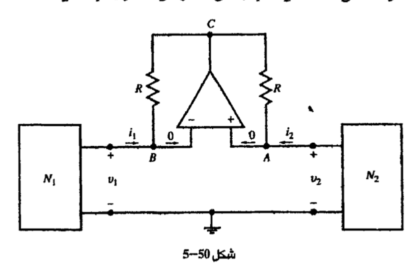
وللحصول على كسب تفاضلى 10^6 يجب أن يكون لدينا :

$$\frac{v_o}{v_2 - v_1} = \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right) = 10^6$$

نختار $R1 = R_G = 1\ k\Omega$ ، $R_2 = 100\ k\Omega$ ، $R_3 = 5\ M\Omega$

الدائرة المبينة شكل 5-49 لها مقاومة دخل تساوى ما لا نهاية وباستخدام مقاومات ذات قيم فى الحدود المعتادة وكذلك باستخدام ثلاث مكبرات التشغيل .

5-27 بين أنه فى الدائرة لشكل 5-50 : $i_1 = i_2$ بغض النظر عن الدائرتين N_1 ، N_2 .



شكل 5-50

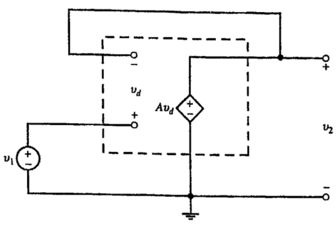
العقـدتان A ، B لهـما نـفس الجهد $v_A = v_B$ وحيث أن مكبر التشغيل لا يسحب تياراً فإن i_1، i_2 يمران خـلال المقاومتين وبتطبيق KVL حـول الحلـقة ABC لمكبر التشـغيل فإننـا نحصـل على $Ri_1 - Ri_2 = 0$ ولذلك فإن $i_1 = i_2$.

5-28 إذا كان N_1 هى منبع جهد v_1 ، N_2 هى المقاومة R_2 فى الدائرة المبينة شكل 5-50 فأوجد مقاومة الدخل $R_{in} = v_1/i_1$.

نحصل من مكبر التشغيل على $v_B = v_A$ ، $i_1 = i_2$. ومن التوصيل إلى N_1 وN_2 يمكن الحصول على $v_A = v_2 = v_B = v_1$ و $v_2 = -i_2R_2$ على التوالى . وتكون مقاومة الدخل هى

$v_1/i_1 = -i_2R_2 / i_2 = -R_2$ وهى القيمة السالبة للحمل . وبذلك يكون مكبر التشغيل هو محول ذو مقاومة سالبة .

5-29 تابع جهد مكون من مكبر تشغيل ذو كسب محدد A للدائرة المفتوحة ومقاومة دخل $R_{in} = \infty$ (انظر شكل 5-51) . أوجد الكسب $G = v_2/v_1$. وبتعريف الحساسية s بأنها النسبة بين معدل التغير فى G ومعدل التغير فى A أوجد s .



شكل 5−51

من شكل 5-51 نحصل على $v_2 = Av_d$. باستخدام KVL حول المكبر نحصل على :

$$v_1 = v_d + v_2 = v_d + Av_d = v_d(1 + A) = v_2(1 + A)/A$$

$$G = \frac{v_2}{v_1} = \frac{A}{1 + A}$$

معدل التغير لقيمة G بالنسبة لـ A هى :

$$\frac{dG}{dA} = \frac{1}{(1 + A)^2} \qquad \text{from which} \qquad dG = \frac{dA}{(1 + A)^2}$$

النسبة المئوية للتغير الناشئ فى G هى 100 (dG/G) :

$$\frac{dG}{G} = \frac{dA}{(1 + A)^2} \times \frac{1 + A}{A} = \frac{1}{1 + A} \times \frac{dA}{A}$$

فتكون الحساسية :

$$s = \frac{dG/G}{dA/A} = \frac{1}{1 + A}$$

نسبة التغير فى G تعتمد على A . جدول 5-8 يوضح بعض العينات لقيم dG/dA ، s .

جـــدول 5-8

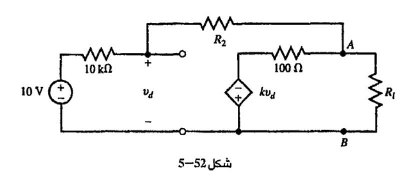
A	$G = v_1/v_1$	dG/dA	s
10	0.909	0.008	0.091
11	0.917	0.007	0.083
100	0.990	0.0001	0.01
1000	0.999	0	0

للقيم الكبيرة لـ A نجد أن الكسب G لا يتأثر كثيراً للتغير فى A .

مسائل إضافية

5-30 أعد المسألة رقم 5-3 باستبدال الدائرة التى على يسار العقدة B (متضمنة R_1 ، R_1 ، υ_2) بمكافىء ثفنين لها (انظر شكل 5-33). حل المسألة باستخدام النتائج بالمثال 5-4 .

5-31 أوجد مكافىء ثفنين للدائرة التى على يسار العقدتين A-B فى شكل 5-52 باعتبار $k = 10$ للتالى. (أ) $R_2 = \infty$ ، (ب) $R_2 = 50\ k\Omega$. الجواب (أ) $\upsilon_{th} = -100V$ ، $R_{th} = 100\ \Omega$. (ب) $\upsilon_{th} = -31.22\ V$ ، $R_{th} = 37.48\ \Omega$.



شكل 5-52

5-32 أعد حل المسألة 5-31 لقيم $R_2 = 50\ k\Omega$ ، $k = 100$.

الجواب: $\upsilon_{th} = 47.16V$ ، $R_{th} = 5.66\ \Omega$.

5-33 أحسب العلاقة بين R ، R_1 ، R_2 فى شكل 5-41 بحيث يكون كسب الدائرة هو $\upsilon_2/i_1 = 10^6$ V/A . الجواب: $RR_2/R_1 = 10^6$.

5-34 فى الدائرة المبينة شكل 5-13 : $V_{cc} = 10\ V$ ، $R_1 = 2\ k\Omega$ ، $\upsilon_1 = 1\ V$. أوجد القيمة العظمى للمقاومة R_2 قبل حدوث حالة التشبع لمكبر التشغيل. الجواب: $R_2 = 20\ k\Omega$.

5-35 إذا كانت دائرة التجميع لشكل 5-14 لها دخلان باعتبار $\upsilon_1 = 1$ ، $\upsilon_2 = \sin t\ (V)$. ضع $R_1 = 3\ k\Omega$ ، $R_2 = 5\ k\Omega$ ، $R_f = 8\ k\Omega$. استخدم طريقة التراكب للحصول على υ_0 .

الجواب: $\upsilon_0 = -[(8/3) + (8/5)\sin t]$.

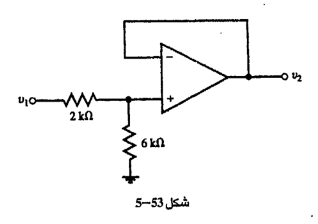
5-36 فى شكل 5-17 ضع $R_1 = 4\ k\Omega$ ، $R_2 = 8\ k\Omega$ استخدم طريقة التراكب للحصول على υ_0 بدلالة جهود الدخل. الجواب: $\upsilon_0 = \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3$.

5-37 أوجد مقاومة الدخل من ناحية υ_f فى شكل 5-19 . الجواب: $R_{in} = 2R_1$.

5-38 استخدم طريقة التراكب للحصول على v_0 فى شكل 20-5 لقيم $R_1 = 2$ ، $R_2 = 7$ ، $R_3 = 10$ ، $R_4 = 5$ وجميع القيم بالكيلو أوم. الجواب : $v_0 = 1.5\, v_2 - 3.5\, v_1$.

5-39 فى الدائرة المبينة 20-5 أوجد (أ) v_0 لقيم $R_1 = 1$ ، $R_2 = 3$ ، $R_3 = 2$ ، $R_4 = 2$ وجميع القيم بالكيلو أوم. (ب) مقاومة الدخل R_{2in} من ناحية v_2. (جـ) التيار i_1 كدالة للجهدين v_1 ، v_2 ويبن أن v_1 تغذى حملاً متغيراً يعتمد على v_2. الجواب : (أ) $v_0 = 2v_2 - 3v_1$. (ب) $R_{2in} = 4$ kΩ. (جـ) $v_1 = v_1 - v_2/2$.

5-40 باستخدام مكبر تشغيل واحد صمم مكبر آلة ذو كسب $v_2/v_1 = 3/4$ ومقاومة دخل 8 kΩ ومقاومة خرج تساوى صفراً.



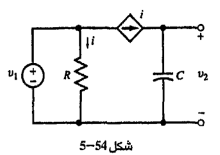
شكل 53–5

5-41 بين أنه إذا كانت $R_1 = \infty$ ، $R_2 = 0$ فإن التشغيل الغير عاكس اللاتحويلى للدائرة المبينة فى شكل 15-5 والمعادلة (12) يؤول إلى تابع جهد.

5-42 فى الدائرة المبينة شكل 22-5 ضع $R_s = 10$ kΩ. (أ) أوجد R_f بحيث يكون $i_s = 0$. (ب) هل R_f لا تعتمد على R_s ناقش الجواب : (أ) 40 kΩ . (ب) نعم.

5-43 إذا كان الدخل للدائرة المبينة شكل 23-5 باعتبار $RC = 1$ هو $v_1 = \sin \omega t$. أكتب KCL عند العقدة B وحل لإيجاد v_2. الجواب : $v_2 = -(1/\omega) \cos \omega t + C$.

5-44 بين أن جهد الخرج v_2 لشكل 54-5 هو نفسه الخرج فى المكامل شكل 23-5.



شكل 54–5

5-45 أوجد الجهد υ_2 فى المكامل المسرب لشكل 24-5 باعتبار : $R_1 = R_f = 1k\,\Omega$ ، $C = 1\mu f$ $\quad v_1 = \begin{cases} 1\,V & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$.

الجواب : $\quad v_2(t) = \begin{cases} -1 + e^{-1000t}\ (V) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

5-46 أعد حل المسألة 45-5 لقيم : $\quad v_1 = \begin{cases} 1\,V & t<0 \\ 0 & t>0 \end{cases}$.

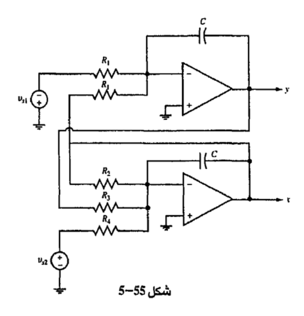
الجواب : $\quad v_2(t) = \begin{cases} -e^{-1000t}\ (V) & t>0 \\ -1\,V & t<0 \end{cases}$

5-47 إذا كان للمعادلة التفاضلية $10^{-2}d\upsilon_2/dt + \upsilon_2 = \upsilon_s$. الجهد υ_s هو الدالة المؤثرة والجهد υ_2 هو التجاوب . صمم دائرة مكبر تشغيل للحصول على υ_2 من υ_s . الجـواب : انظر شكل 24-5 باعتبار $R_1 = R_f = R$ ، $RC = 10^{-2}$ ، $\upsilon_1 = -\upsilon_s$.

5-48 صمم دائرة مكبر تشغيل لحل المعادلات التالية :

$$y' + x = \upsilon_{s1}$$
$$2y + x' + 3x = -\upsilon_{s2}$$

الجواب : انظر شكل 55-5 باعتبار $R_1C = R_4C = 1\,s$ ، $R_2C = (1/3)\,s$ ، $R_3C = (1/2)\,s$.



شكل 55–5



الفصل السادس

الإشارات والأشكال الموجبة

6.1 مقدمـــة

توصف الجهود والتيارات فى الدوائر الكهربية بثلاثة أقسام بالنسبة لدوال الزمن .

(i) دوال دورية .

(ii) دوال غير دورية .

(iii) دوال عشوائية .

فى هذا الفـصل يكون مـجـال الزمن لجـمـيع الـدوال هو $-\infty < t < +\infty$ وستستخدم بعض الاصطلاحات بصفة متكررة مثل الإشارة والدالة والشكل الموجى .

6.2 الـدوال الدوريـة :

تكون الإشارة $v(t)$ دورية بدورة T إذا كان .

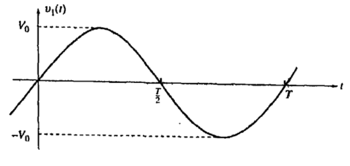
$$v(t) = v(t + T) \qquad \text{for all } t$$

وفيما يلى أربعة أنواع من الدوال الدورية التى لها فترة دورة T وبيانها كالتالى :

(أ) الموجة الجيبية :

$$v_1(t) = V_0 \sin 2\pi t / T \qquad (1)$$

انظر شكل 6-1(a) :

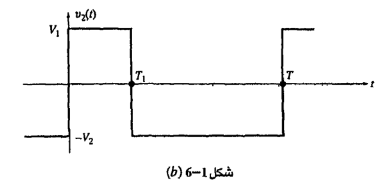


شكل 6-1 (a)

(ب) النبضة الدورية :

$$v_2(t) = \begin{cases} V_1 & \text{for } 0 < t < T_1 \\ -V_2 & \text{for } T_1 < t < T \end{cases} \tag{2}$$

انظر شكل 6-1(b) :

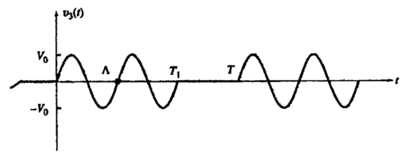


شكل 6-1 (b)

(جـ) الدفعة المنتظمة الدورية :

$$v_3(t) = \begin{cases} V_0 \sin 2\pi t/\Lambda & \text{for } 0 < t < T_1 \\ 0 & \text{for } T_1 < t < T \end{cases}$$

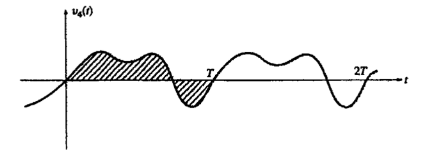
حيث T = kA ، k هي عدد صحيح . انظر شكل 6-1(c) :



شكل 1–6 (c)

(د) تكرار دورى تسجيلى كل T ثانية :

انظر شكل 6-1(c):



شكل 1–6 (d)

أحياناً تكون الإشارات الدورية مركبة جداً ومع هذا فإنه يمكن تمثيلها بمجموعة من الدوال الجيبية. كما سنرى فى الفصل 17 .

6.3 الدوال الجيبية

الجهد الجيبى $v(t)$ يعطى بالمعادلة :

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

حيث V_0 هى القيمة العظمى ، ω هى السرعة الزاوية أو التردد الزاوى θ وهى زاوية الوجه .

ويمكن التعبير عن السرعة الزاوية ω بدلالة الدورة T أو بالتردد f حيث $f = 1/T$. ووحدة قياس التردد هى هيرتز Hz أو دورات/ ثانية . وحيث أن $\cos \omega t = \cos(\omega t + 2\pi)$ وأيضاً T تعرف من

العلاقة $\omega T = 2\pi$. وحيث أن الجهد $\upsilon(t)$ يحاج إلى T ثانية ليعود إلى قيمته الأصلية فإن ذلك يستغرق 1/T من الدورات فى الثانية الواحدة.

ويمكن تلخيص علاقات الدوال الجيبية بالتالى

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f \qquad f = 1/T = \omega/2\pi \qquad T = 1/f = 2\pi/\omega$$

مثـــال 6-1: ارسم كل من الدوال التالية وحدد دورتها وترددها.

$$(a)\ v_1(t) = \cos t \qquad (b)\ v_2(t) = \sin t \qquad (c)\ v_3(t) = 2\cos 2\pi t$$
$$(d)\ v_4(t) = 2\cos(\pi t/4 - 45^\circ) = 2\cos(\pi t/4 - \pi/4) = 2\cos[\pi(t-1)/4]$$
$$(e)\ v_5(t) = 5\cos(10t + 60^\circ) = 5\cos(10t + \pi/3) = 5\cos 10(t + \pi/30)$$

(a) See Fig. 6-2(a). $T = 2\pi = 6.2832$ s and $f = 0.159$ Hz.
(b) See Fig. 6-2(b). $T = 2\pi = 6.2832$ s and $f = 0.159$ Hz.
(c) See Fig. 6-2(c). $T = 1$ s and $f = 1$ Hz.
(d) See Fig. 6-2(d). $T = 8$ s and $f = 0.125$ Hz.
(e) See Fig. 6-2(e). $T = 0.2\pi = 0.62832$ s and $f = 1.59$ Hz.

مثـــال 6-2: ارسم الدالة $\upsilon(t) = 5\cos \omega t$ بدلالة ωt .

انظر شكل 6-3 :

6.4 الإزاحة الزمنية وإزاحة الوجه

إذا تأخرت الدالة $\upsilon(t) = \cos \omega t$ بالفترة τ ثانية نحصل على.

$\upsilon(t - \tau) = \cos \omega(t - \tau) = \cos(\omega t - \theta)$ حيث $\theta = \omega\tau$. ويعمل التأخير على إزاحة $\upsilon(t)$ إلى اليمين بقيمة تعادل τ ثانية وهى مناظرة إلى تأخر وجهى $\theta = \omega\tau = 2\pi f\tau$. والإزاحة الزمنية إلى اليسار التى قيمتها τ ثانية فى الشكل ينتج عنها $\upsilon(t + \tau)$ مبيناً تقدم لزاوية الوجه تسمى التقدم.

وبالعكس فإن الإزاحة الوجهية θ تؤول إلى إزاحة زمية τ . ولذلك فإنه لإزاحة وجهية معينة كلما كبر التردد كلما صغرت الإزاحة الزمنية اللازمة.

مثـــال 6-3: ارسم $\upsilon(t) = 5\cos(\pi t/6 + 30^\circ)$ بالنسبة لقيم t وقيم $\pi t/6$.

أعد كتابة المطلوب كالتالى :

$$v(t) = 5\cos(\pi t/6 + \pi/6) = 5\cos[\pi(t+1)/6]$$

وهذه دالة جيب تمام لها دورة 12 s ، متقدمة بالزمن 1s أى أن الشكل مزاح إلى اليسار بقيمة 1s أو °30 كما هو مبين فى شكل 6-4 .

مثـــــال 6-4: افتـرض دائرة خطية لها قيــم دخــل - خــرج صحيحة لجميع قيم ω ، A . كما يلى .

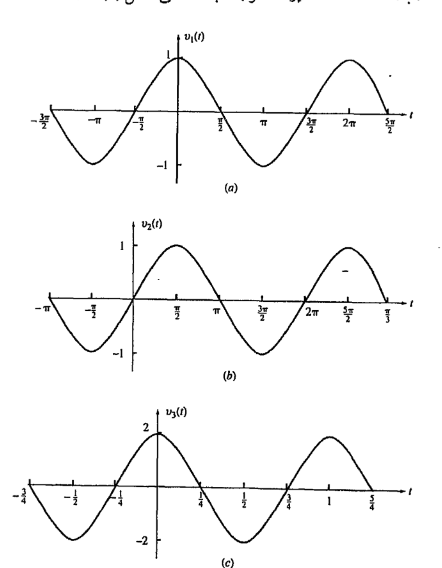
الدخل $\upsilon_i(t) = A \cos \omega t$

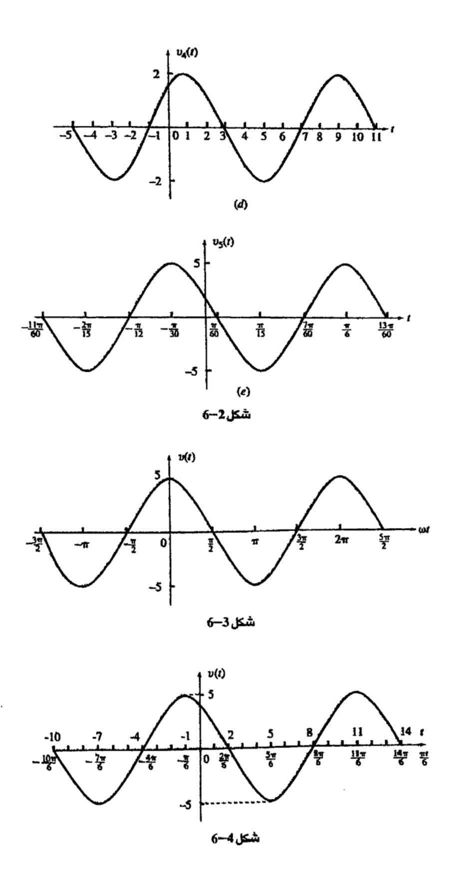
الخرج $V_0(t) = A \cos (\omega t - \theta)$

فإذا كان $V_i(t) = A \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$ أوجد $V_0(t)$ عندما

(أ) $\theta = 10^6\ \omega$ (إزاحة الوجه تتناسب مع التردد كما فى شكل (6-5(a) .

(ب) $\theta = 10^{-6}\ \omega$ (إزاحة الوجه ثابتة كما فى شكل (6-5(b) .

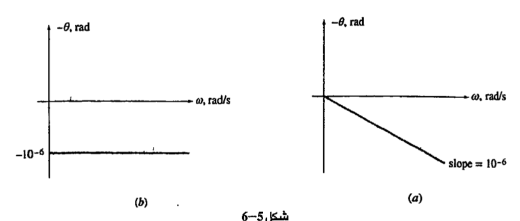




شکل 2—6

شکل 3—6

شکل 4—6



شكل 6–5

جهد الخرج هو $\upsilon_0(t) = \cos(\omega_1 t - \theta_1) + \cos(\omega_2 t - \theta_2)$.

(أ) $\theta_2 = 10^{-6}\,\omega_2$ و $\theta_1 = 10^{-6}\,\omega_1$ ومن ثم

$$\upsilon_0(t) = \cos(\omega_1 t - 10^{-6}\omega_1) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6}\omega_2)$$
$$= \cos\omega_1(t - 10^{-6}) + \cos\omega_2(t - 10^{-6}) = \upsilon_i(t - 10^{-6}) = \upsilon_i(t - \tau)$$

حيث $\tau = 10^{-6}\ s = 1\ \mu s$. ولما كانت إزاحة الوجه تتناسب مع ω فإنها توفر جميع مركبات الدخل بالزمن $1\mu s$ [شكل (a)6-5] ويتبع الخرج الدخل بدون أى إنحراف .

(ب) $\theta_1 = \theta_2 = 10^{-6}$ ومن ثم :

$$\upsilon_0(t) = \cos(\omega_1 t - 10^{-6}) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6})$$
$$= \cos\omega_1(t - 10^{-6}/\omega_1) + \cos\omega_2(t - 10^{-6}/\omega_2)$$

إزاحة الوجه الثابت [شكل (b)6-5] تعمل على تأخير مركبات الدخل المعتمدة على التردد ولكن بقيم مختلفة . ويكون الخرج منحرفاً عن الدخل .

6.5 الدوال الدورية المركبة

يعتبر مجموع دالتين دوريتين بزمن دورى T_1 ، T_2 دالة دورية أيضاً إذا كان الزمن الدورى المشترك $T = n_1T_1 = n_2T_2$ حيث n_1 ، n_2 أعداد صحيحة . وهذا يتطلب أن تكون $T_1/T_2 = n_2/n_1$ عدد جذرى وإلا فإن الجمع لا ينتج عنه دالة دورية .

مثال 6-5 : أوجد الزمن الدورى للمعادلة $\upsilon(t) = \cos 5t + 3\sin(3t + 45°)$. الزمن الدورى لـ $\cos 5t$ هو $T_1 = 2\pi/5$ والزمن الدورى لـ $3\sin(3t + 45°)$ هو $T_2 = 2\pi/3$.

بأخذ أصغر مضروب مشترك لكل من T_1، T_2 وليكن $T = 2\pi = 5T_1 = 3T_2$. نلاحظ أن $\upsilon(t+T) = \upsilon(t)$ حيث :

$$v(t + T) = \cos 5(t + 2\pi) + 3 \sin [3(t + 2\pi) + 45°] = \cos 5t + 3 \sin (3t + 45°) = v(t)$$

لذلك فإن فترة تعاقب الدالة $\upsilon(t)$ هو 2π .

مثـــــال 6-6 : هل الدالة $\upsilon(t) = \cos t + \cos 2\pi t$ دورية؟

ناقش دورة $\cos t$ هى $T_1 = 2\pi$. ودورة $\cos 2\pi t$ هى $T_2 = 1$. ولذلك فإنه لا توجد دورة مشتركة $T = n_1T_1 = n_2T_2$ لأن $T_1/T_2 = 2\pi$ وهو عدد ليس جذرياً. لذلك $\upsilon(t)$ ليست دوورية.

مثـــــال 6-7 : إذا كان $p = 3.4$ أوجد دورة الدالة $\upsilon(t) = \cos t + \cos 2pt$.

دورة $\cos t$ هى $T_1 = 2\pi$ ودورة $\cos 2\pi t$ هى $T_2 = \pi/3.14$. النسبة $T_1/T_2 = 6.28$ وهو عدد جذرى والعددين الصحيحين $n_1 = 25$، $n_2 = 157$ يحققان العلاقة $n_2/n_1 = T_1/T_2 = 628/100 = 157/25$ لذلك فـإن $\upsilon(t)$ دوريـــة لفتـــــرة دوريـــة $T = n_1T_1 = n_2T_2 = 50\pi$ s .

المتماثلات المثلثية

جدول 6-1 يحتوى على المتماثلات المثلثية ذات النفع الكبير فى دراسة تحليل الدوائر .

جــــدول 6-1

$\sin a = -\sin(-a)$	(5a)
$\cos a = \cos(-a)$	(5b)
$\sin a = \cos(a - 90°)$	(5c)
$\cos a = \sin(a + 90°)$	(5d)
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$	(6a)
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$	(6b)
$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$	(7a)
$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$	(7b)
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	(8a)
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	(8b)
$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a - b) - \frac{1}{2}\cos(a + b)$	(9a)
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\sin(a + b) + \frac{1}{2}\sin(a - b)$	(9b)
$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a + b) + \frac{1}{2}\cos(a - b)$	(9c)
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$	(10a)
$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$	(10b)

مثـــال 6-8 : عبر عن $\upsilon(t) = \cos 5t \sin (3t + 45°)$ كمجموع دالتين لجيب التمام وأوجد دورتها .

$$\upsilon(t) = \cos 5t \sin (3t + 45°) = [\sin (8t + 45°) - \sin (2t - 45°)]/2 \quad [\text{Eq. } (9b)]$$
$$= [\cos (8t - 45°) + \cos (2t + 45°)]/2 \quad [\text{Eq. } (5c)]$$

دورة الدالة $\upsilon(t)$ هى π .

6.6 القيم المتوسطة والقيم الفعالة (RMS)

الدالة الدورية $f(t)$ التى لها زمن دورى T يكون لها قيمة متوسطة F_{avg} كالتالى :

$$F_{avg} = \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt \tag{11}$$

قيمة جذر متوسط المربعات (rms) ويطلق عليها القيمة الفعالة للدالة $f(t)$ أثناء نفس زمنها الدورى تعرف بالتالى :

$$F_{eff} = F_{rms} = \left[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)\,dt\right]^{1/2} \tag{12}$$

من الملاحظ أن $F^2_{eff} = [f^2(t)]$.

القيم المتوسطة والفعالة للدوال الدورية تحسب عادة خلال دورة واحدة .

مثـــال 6-9 : أوجد القيم المتوسطة والفعالة لموجة جيب التمام $\upsilon(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$.

باستخدام المعادلة (11) .

$$V_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T V_m \cos(\omega t + \theta)\,dt = \frac{V_m}{\omega T}[\sin(\omega t + \theta)]_0^T = 0 \tag{13}$$

وباستخدام المعادلة (12) .

$$V^2_{eff} = \frac{1}{T}\int_0^T V^2_m \cos^2(\omega t + \theta)\,dt = \frac{1}{2T}\int_0^T V^2_m[1 + \cos 2(\omega t + \theta)]\,dt = V^2_m/2$$

ومنها

$$V_{eff} = V_m/\sqrt{2} = 0.707 V_m \tag{14}$$

تبين المعادلتان (13)، (14) أن النتائج لا تعتمد على التردد أو زاوية الوجه θ أى أن متوسط موجة جيب التمام وقيمة rms هى دائماً 0، $0.707\ V_m$ على التوالى.

مثـــال 6-10: أوجد V_{avg}، V_{eff} لنصف الموجة الجيبية الموحدة.

$$v(t) = \begin{cases} V_m \sin \omega t & \text{when } \sin \omega t > 0 \\ 0 & \text{when } \sin \omega t < 0 \end{cases} \qquad (15)$$

ومن المعادلة (11):

$$V_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} V_m \sin \omega t \, dt = \frac{V_m}{\omega T}[-\cos \omega t]_0^{T/2} = V_m/\pi \qquad (16)$$

ومن المعادلة (12):

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} V_m^2 \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2T}\int_0^{T/2} V_m^2(1-\cos 2\omega t)\, dt = V_m^2/4$$

والتى منها:

$$V_{eff} = V_m/2 \qquad (17)$$

مثـــال 6-11: أوجد V_{avg}، V_{eff} الدالة الدورية $v(t)$ لفترة دورية واحدة T.

$$v(t) = \begin{cases} V_0 & \text{for } 0 < t < T_1 \\ -V_0 & \text{for } T_1 < t < 3T_1 \end{cases} \qquad \text{Period } T = 3T_1 \qquad (18)$$

للحصول على

$$V_{avg} = \frac{V_0}{3T}(T_1 - 2T_1) = \frac{-V_0}{3} \qquad (19)$$

و

$$V_{eff}^2 = \frac{V_0^2}{3T}(T_1 + 2T_1) = V_0^2$$

ومنها

$$V_{eff} = V_0 \qquad (20)$$

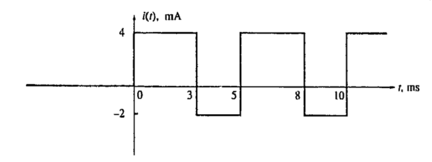
ويمكن تعميم النتائج السابقة كالتالى: إذا كان $|v(t)| = V_0$ فإن $V_{eff} = V_0$.

مثـــال 6-12: أحسب متوسط القدرة المستهلكة من 0 إلى T فى المقاومة المتصلة بجهد $v(t)$. استبدل $v(t)$ بجهد ثابت V_{dc}. أوجد الجهد V_{dc} بحيث تكون القدرة المستهلكة خلال تلك الفترة واحدة.

$$p = vi = v^2/R$$

$$P_{avg} = \frac{1}{RT}\int_0^T v^2(t)\,dt = \frac{1}{R}V_{eff}^2 = \frac{V_{dc}^2}{R} \qquad \text{or} \qquad V_{dc} = V_{eff}$$

مثـــال 6-13: التيار i(t) المبين شكل 6-6 يمر خـلال مكثف 1-μF . أوجـد (أ) الجهـد v_{ac} على طرفى المكثف عند الأزمنة t = 5k ms (k = 0, 1, 2, 3,...) . (ب) قيمة التيار الثابت للمنبع I_{dc} الذى ينشـأ عنه نفس الجهـد على نفس المكثـف عند t = 5k مع مـلاحظة أن t > 0 . قارن قيمة I_{dc} مع [i(t)] . وهى القيمـة المتوسطة للتيار i(t) شكل 6-6 لفترة زمنية 5 ms بعد t > 0 .



شكل 6-6

(أ) عند t = 5 ms .

$$v_{ac} = \frac{1}{C}\int_0^{5\times10^{-3}} i(t)\,dt = 10^6(10^{-3})\left[\int_0^{3\times10^{-3}} 4\,dt - \int_{3\times10^{-3}}^{5\times10^{-3}} 2\,dt\right] = 12 - 4 = 8\text{ V}$$

وهو التأثير الحقيقى لتيار الشحن خلال كل فترة مقدارها 5 ms . وكـل 5 ms تضاف الكمية السابقة إلى جهد المكثف . لذلك فإنه عند t = 5 kms فإن v = 8 k(V) .

(ب) مع التيار الثابت I_{dc} فإن جهد المكثف v_{dc} عند t = 5k ms هو :

$$v_{dc} = \frac{1}{C}\int_0^{5k\times10^{-3}} I_{dc}\,dt = 10^6(I_{dc})(5k\times10^{-3}) = 10^3(5k)(I_{dc}) \quad (\text{V})$$

وحيث أن $v_{dc} = v_{ac}$ عند 5 k ms فإنه :

$$10^3(5k)(I_{dc}) = 8k \qquad \text{or} \qquad I_{dc} = 8k/(5k\times10^3) = 1.6\times10^{-3}\text{ A} = 1.6\text{ mA}$$

لاحظ أن $Id_c = [i(t)]$ لشكل 6-6 لأى فترة زمنية مقدارها 5 ms عند t > 0 .

6.7 الدوال الغير دورية

لا يمكن تعريف الدالة الغير دورية لجميع الأزمنة ببساطة بواسطة جزء معين منها . والأمثلة على الدوال الغير دورية هى :

(a) $$v_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (21)$$

(b) $$v_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1/T & \text{for } 0 < t < T \\ 0 & \text{for } t > T \end{cases} \quad (22)$$

(c) $$v_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ e^{-t/\tau} & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (23)$$

(d) $$v_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ \sin \omega t & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (24)$$

(e) $$v_5(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ e^{-t/\tau} \cos \omega t & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (25)$$

(f) $$v_6(t) = e^{-t/\tau} \quad \text{for all } t \quad (26)$$

(g) $$v_7(t) = e^{-a|t|} \quad \text{for all } t \quad (27)$$

(h) $$v_8(t) = e^{-a|t|} \cos \omega t \quad \text{for all } t \quad (28)$$

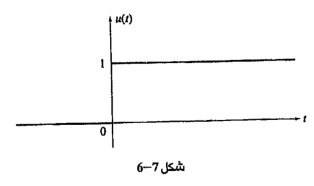
كثير من هذه الدوال تستخدم فى التمثيل الرياضى وبناء نماذج للإشارات الحقيقية لتحليل وتصميم الدوائر الكهربية وستناقش الأمثلة فى البنود التالية :

6.8 دالة الوحدة السلمية

تعرف دالة الوحدة السلمية (بغض النظر عن مقياس الرسم) بالتالى :

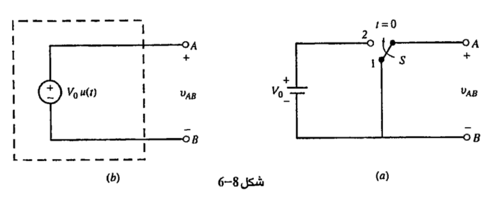
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (29)$$

ورسم الدالة مبين بشكل 7-6 . لاحظ أن الدالة غير معرفة عند $t = 0$.



شكل 7–6

لبيان استخدام $u(t)$ افترض أن المفتاح S فى الدائرة شكل 6-8(a) فى الوضع 1 عند الزمن $t < 0$ ثم تحرك للوضع 2 عند الزمن $t = 0$. الجهد على الطرفين A-B يمكن اعتباره $\upsilon_{AB} = V_0\, u(t)$. وبيان الدائرة المكافئة لجهد الوحدة فى شكل 6-8(b) .



شكل 6–8

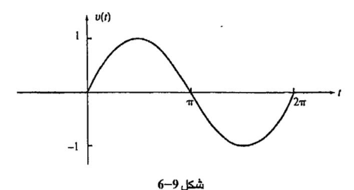
مثـــــال 6-14 : إذا كان المفتاح فى الدائرة المبينة شكل 6-8(a) تحرك إلى الوضع 2 عند الزمن $t = t_0$ عبر عن الجهد υ_{AB} باستخدام دالة الوحدة .

ظهور الجهد V_0 على الطرفين A-B يتـأخر حتى $t = t_0$. استبـدل الحـد t فى دالة الوحدة بالقيمة $t - t_0$ وبذلك نحصل على $\upsilon_{AB} = V_0\, u(t - t_0)$.

مثـــــال 6-15 : إذا كان المفتاح فى شكل 6-8(a) تحرك للوضع 2 عند الزمن $t = 0$ ثم ارجع إلى الوضع 1 عند الزمن $t = 5$ s عبر عن الجهد υ_{AB} باستخدام دالة الوحدة .

$$\upsilon_{AB} = V_0[u(t) - u(t - 5)]$$

مثـــــال 6-16 : عبر عن الجهد $\upsilon(t)$ المرسوم فى شكل 6-9 باستخدام دالة الوحدة .



شكل 6–9

$$\upsilon(t) = [u(t) - u(t - 2\pi)] \sin t$$

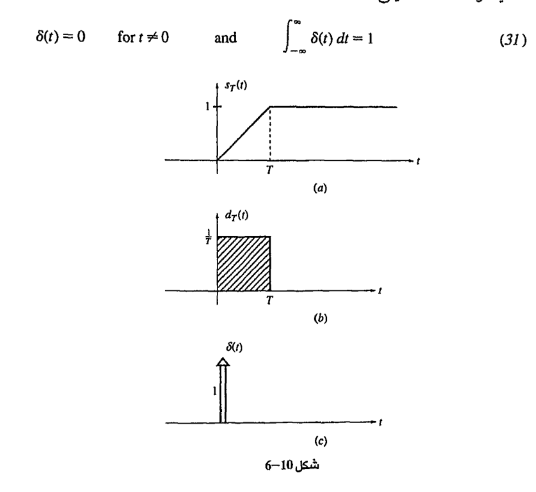
6.9 دالة الوحدة الدفعية

إذا رجعنا إلى الدالة $s_T(t)$ المرسومة فى شكل 6-10(a) التى تساوى صفراً عند $t = < 0$ وتزداد بانتظام من 0 إلى 1 فى الزمن T ثانية . فإن المشتقة الأولى لها $d_T(t)$ هى نبضة فترتها الزمنية T وارتفاعها 1/T كما هو مبين فى شكل 6-10(b) .

$$d_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1/T & \text{for } 0 < t < T \\ 0 & \text{for } t > T \end{cases} \qquad (30)$$

إذا نقصت الفترة الانتقالية T فإن النبضة فى شكل 6-10(b) تصبح أضيق وأطول ولكن المساحة للنبضة تظل مساوية للقيمة واحد . وإذا سمحنا للفترة T أن تقترب من الصفر فإنه فى النهاية تصبح الدالة $s_T(t)$ دالة وحدة سلمية $\mu(t)$ وتصبح مشتقتها $d_T(t)$ وحدة دفعية $\delta(t)$ ذات عرض يساوى صفر وارتفاع ما لا نهاية ودالة الوحدة الدفعية $\delta(t)$ موضحة فى شكل 6-10(c) ويمكن التعبير عن دالة الوحدة الدفعية أو دالة دلتا كما يلى :

$$\delta(t) = 0 \qquad \text{for } t \neq 0 \qquad \text{and} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \qquad (31)$$



شكل 6–10

والدفعة التى هى نهاية نبضة ضيقة ذو المساحة A يعبر عنها $A\delta(t)$. وأحياناً يطلق على قيمة A بقوة الدفعة . ودفعة الوحدة التى تحدث عن الزمن $t = t_0$ يعبر عنها بالقيمة $\delta(t = t_0)$.

مثــــال 6-17 : إذا كان الجهد على طرفى مكثف 100-nF يزداد تدريجياً من 0 إلى 10V متخذاً شكل الدالة $s_T(t)$ المبينة شكل 6-10(a) . أوجد (أ) الشحنة على المكثف عند $t = T$ ، (ب) التيار $i_C(t)$ للمكثف عند الأزمنة $T = 1\ s$ ، $T = 1\ ms$ ، $T = 1 \mu s$.

(أ) عند $t = T$ ، $\upsilon_C = 10\ V$. فإن الشحنة على المكثف تكون $Q = C\upsilon_C = 10^{-7} \times 10 = 10^{-6}$

(ب) $$i_c(t) = C\frac{d\upsilon_C}{dt}$$

من شكل 6-10 :

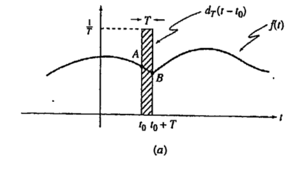
$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ I_0 = 10^{-6}/T \quad (A) & \text{for } 0 < t < T \\ 0 & \text{for } t > T \end{cases} \tag{32}$$

لقيم $T = 1\ s$ ، $I_0 = 10^{-6}$ ، عند $T = 1\ ms$ ، $I_0 = 10^{-3}\ A$ ، عند $T = 1\ \mu s$ ، $I_0 = 1\ A$. فى جميع الحالات السابقة تكون الشحنة المجمعة على المكثف فى نهاية الفترة الانتقالية هى :

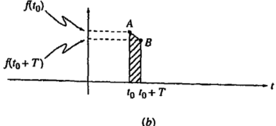
$$Q = \int_0^T i_C(t)\, dt = I_0 T = 10^{-6}\ C$$

ولا تعتمد الشحنة عند $t = T$ على T . وتعمل على توليد جهد $\upsilon_c = 10\ V$ على طرفى المكثف .

مثــــال 6-18 : إذا كان $d_T(t - t_0)$ تمثل نبضة دقيقة بعرض T وارتفاع 1/T التى تبدأ عند $t = t_0$. وباعتبار الدالة $f(t)$ التى تكون مستمرة بين t_0 ، $t_0 + T$ كما هو مبين شكل 6-11(a) . أوجد الحد للفترة I للمعادلة (33) حينما تقترب T من الصفر .



(a)



(b)

شكل 11-6

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} d_T(t-t_0)f(t)\,dt \tag{33}$$

$$d_T(t-t_0)=\begin{cases}1/T & t_0<t<t_0+T\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

بالتعويض لقيمة d_T فى المعادلة (33) نحصل على :

$$I=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt=\frac{S}{T} \tag{34a}$$

حيث S هى المساحة المظللة تحت الدالة f(t) بين t_0 ، t_0+T فى شكل 6-11(b) . وباعتبار قيمة T صغيرة فإنه يمكن تقريب الدالة f(t) بالخط المستقيم الواصل بين A ، B . وتكون S المساحة الناتجة عن شبه المنحرف .

$$S=\tfrac{1}{2}[f(t_0)+f(t_0+T)]T \tag{34b}$$

$$I=\tfrac{1}{2}[f(t_0)+f(t_0+T)] \tag{34c}$$

As $T\to 0$, $d_T(t-t_0)\to\delta(t-t_0)$ and $f(t_0+T)\to f(t_0)$ and from (*34c*) we get

$$\lim_{T\to 0} I=\lim_{T\to 0}\tfrac{1}{2}[f(t_0)+f(t_0+T)] \tag{34d}$$

وقد اعتبرنا أن الدالة f(t) مستمرة بين t_0 ، t_0+T لذلك :

$$\lim_{T\to 0} I=f(t_0) \tag{34e}$$

ولكن

$$\lim_{T\to 0} I=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt \tag{34f}$$

ومن ثم

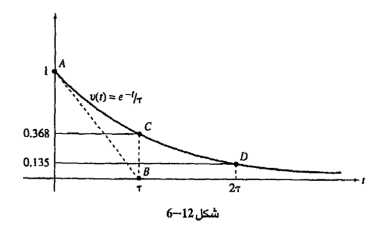
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=f(t_0) \tag{34g}$$

والمطابقة (34g) تسمى الخاصية المدققة لدالة الدفعة . وتستخدم أيضاً كتعريف بديل لـ $\delta(t)$.

6.10 الدالة الأسية

تسمى الدالة $f(t) = e^{st}$ حيث s هو ثابت مركب بالدالة الأسية. وهى تتناقص مع الزمن إذا كان الجزء الحقيقى من قيمة s سالباً وتزداد إذا كان الجزء الحقيقى من s موجباً. وستناقش القيم الأسية e^{at} التى فيها الثابت a رقماً حقيقياً.

ومقلوب الثابت a يقاس بوحدات الزمن ويسمى ثابت الزمن $\tau = 1/a$. وشكل 6-12 يبين قيمة أسية متناقصة $e^{-t/\tau}$ كمتغير بالنسبة لـ t وتتناقص الدالة من القيمة واحد عند $t = 0$ للقيمة صفر عند $t = \infty$. وبعد τ من الثوانى فإن الدالة $e^{-t/\tau}$ تصل القيمة $0.368 = e^{-1}$. وعند $\tau = 1$ فإن الدالة e^{-t} تسمى أسية معتادة وهى مثل $e^{-t/\tau}$ حينما ترسم كمتغير بالنسبة t/τ.



شكل 6–12

مثـــال 6-19: بين أن المماس للدالة الأسية $e^{-t/\tau}$ عند $t = 0$ يتقاطع مع محور t عند الزمن $t = \tau$ كما هو مبين شكل 6-12.

تبدأ خط المماس عند النقطة A $(\upsilon = 1, t = 0)$ بميل قدره: $\left. de^{-t/\tau} / dt \right|_{t=0} = -1/\tau$. وتكون معادلة الخط هى $\upsilon_{tan}(t) = -t/\tau + 1$ ويقطع الخط محور t عند النقطة B حيث $t = \tau$. وهذه الملاحظة تعطينا طريقة تقريبية لرسم الدالة الأسية كما هو مبين فى مثال 6-20.

مثـــال 6-20: ارسم شكلاً تقريبياً للدالة $\upsilon(t) = e^{-t/\tau}$ عند $t > 0$.

حدد نقطة البداية A $(t = 0, \upsilon = 1)$ للمنحنى ونقطة التقاطع B للمماس مع محور t عند $t = \tau$.
ارسم خط المماس AB وحدد نقطتين أخريين C، D عند $t = \tau$، $t = 2\tau$ بالارتفاعين 0.368،

$0.368^2 = 0.135$ على التوالى. وبذلك تكون النقطتان على المنحنى. باستخدام النقاط السابقة يمكن رسم المنحنى ويمكن تحديد نقط أخرى لكى بتقريب أكثر دقة انظر شكل 12-6 .

مثـــال 21-6: (أ) بين أن معدل التغير بالنسبة للزمن للدالة الأسية $v = Ae^{st}$ هو عند أى لحظة يكون متناسباً مع قيمة الدالة عند نفس اللحظة. (ب) بين أن أى مركبة خطية من الدوال الأسية ومشتقاتها النونية n تكون متناسبة مع الدالة الأصلية وأوجد معامل التناسب.

(أ) معدل التغير فى الدالة يساوى المشتقة الأولى لها وبالنسبة للدالة الأسية يكون:

$$\frac{dv}{dt} = sAe^{st} = sv$$

(ب) باستخدام النتائج فى (أ) نحصل على:

$$\frac{d^n v}{dt^n} = s^n Ae^{st} = s^n v$$

$$a_0 v + a_1 \frac{dv}{dt} + \cdots + a_n \frac{d^n v}{dt^n} = (a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n)v = Hv \qquad (35)$$

حيث

$$H = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n \qquad (36)$$

تعريف ورسم الدالة $f(t) = Ae^{-at} + B$.

غالباً ما نواجه الدالة :

$$f(t) = Ae^{-at} + B \qquad (37)$$

وهذه الدالة تعرف تماماً بالأرقام الثلاثة A ، B ، a كالتالى :

A = القيمة الابتدائية – القيمة النهائية ، B = القيمة النهائية ، a = مقلوب ثابت الزمن .

أو بتعبير آخر.

القيمة الابتدائية $f(0) = A + B$ ، والقيمة النهائية $f(\infty) = B$ ، وثابت الزمن $= 1/a$.

مثـــال 22-6 : أوجـد الدالة $\upsilon(t)$ التى تتناقص أسياً من القيمة 5V عند $t = 0$ إلى 1 V عند $t = \infty$ بثابت زمن قدره 3 s . ارسم الدالة $\upsilon(t)$ مستخدماً طريقة المثال 20-6 .

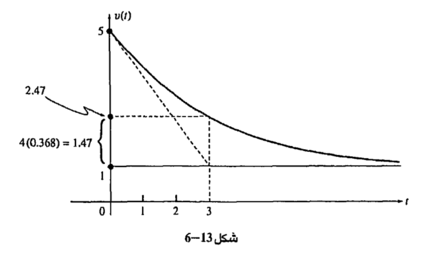
من المعـادلــة (37) لـدينـا $\upsilon(t) = Ae^{-t/\tau} + B$ والآن $\upsilon(0) = A + B = 5$ ، $\upsilon(\infty) = B = 1$ ، $A = 4$ ، $\tau = 3$ لذلك :

$$\upsilon(t) = 4e^{-t/3} + 1$$

ويمكن تعميم النتيجة السابقة على النحو التالى :

$\upsilon(t)$ = (القيمة الابتدائية – القيمة النهائية) $e^{-t/\tau}$ + (القيمة النهائية)

والرسم مبين فى شكل 13-6 :



شكل 13–6

مثـــال 23-6 : الجهد $\upsilon = V_0e^{-|t|/\tau}$ حيث $\tau > 0$ متصل بمكثف . أوجد التيار i فى المكثف ، ارسم تغير υ مع i للقيم $V_0 = 10$ V ، $C = 1$ μF ، $\tau = 1$ ms .

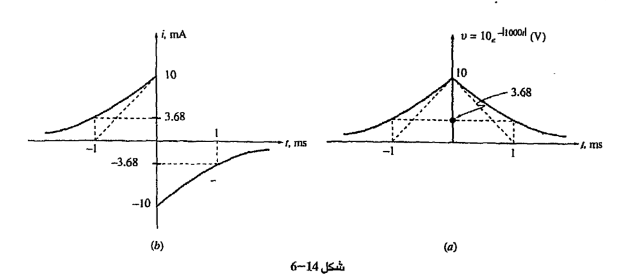
باستخدام العلاقة $i = C\,d\upsilon/dt$.

$$\text{for } t < 0, \qquad \upsilon = V_0e^{t/\tau} \qquad \text{and} \qquad i = I_0e^{t/\tau}$$

$$\text{for } t > 0, \qquad \upsilon = V_0e^{-t/\tau} \qquad \text{and} \qquad i = -I_0e^{-t/\tau}$$

حيث $I_0 = CV_0/\tau$.

لقيم $V_0 = 10V$، $C = 1\ \mu F$، $\tau = 10^{-3}$ s نحصل على $I_0 = 10$ mA . ورسم تغير كل من υ، i مع الزمن مبين فى شكل 6-14(a)، شكل 6-14(b) على التوالى.



شكل 6–14

6.11 الدوال الجيبية المخمدة

الدالة الجيبية ذات القيم العظمى المتناقصة أسياً لها الشكل التالى :

$$v(t) = Ae^{-at} \cos(\omega t + \theta) \qquad (38)$$

وستناقش هذه الدالة بالتفصيل فى الفصل 8 .

مثال 6-24 : يمر التيار $i = I_0 e^{-at} \cos \omega t$ فى دائرة توالى RL . (أ) أوجد الجهد υ_{RL} لهذه المجموعة. (ب) أحسب υ_{RL} إذا كان $I_0 = 3$ A، $a = 2$، $\omega = 40$ rad/s، $R = 5\Omega$، $L = 0.1$ H . ارسم i كدالة فى الزمن.

(أ) لدينا :

$$v_R = Ri = RI_0 e^{-at} \cos \omega t$$

$$v_L = L\frac{di}{dt} = -LI_0 e^{-at}(a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$$

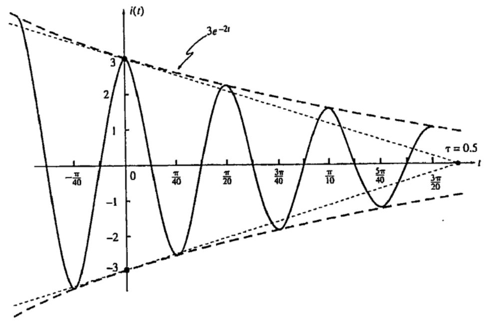
$$v_{RL} = v_R + v_L = I_0 e^{-at}[(R - La) \cos \omega t - L\omega \sin \omega t] = V_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta)$$

$$V_0 = I_0\sqrt{(R - La)^2 + L^2\omega^2} \qquad \text{and} \qquad \theta = \tan^{-1}[L\omega/(R - La)] \qquad (39)$$

(ب) بالتعويض بالقيم السابقة فى المعادلة (39) فإن $V_0 = 18.75$ V ، $\theta = 30.8°$. ويعطى التيار i والجهد v_{RL} كالتالى :

$$i = 3e^{-2t} \cos 40t \qquad \text{and} \qquad v_{RL} = 18.75e^{-2t} \cos (40t + 39.8°)$$

التيار i مبين فى شكل 15-5 .



شكل 15–6

6.12 الإشارة العشوائية

تعاملنا حتى الآن مع الإشارات المعرفة تعريفاً كاملاً . على سبيل المثال فإن قيمة الموجه الجيبية مثل جهد الخط يمكن الحصول عليه عند جمع الأزمنة إذا كانت القيمة العظمى والتردد وزاوية الوجه معروفة . وهذه الإشارات تعرف بأنها معينة .

وتوجد مجموعة أخرى من الإشارات والتى تعرف جزئياً من خلال فترة زمنية بالقيمة المتوسطة والقيمة الفعالة ومدى التردد . وهذه تسمى بالإشارات العشوائية . ويمكن أن تحمل الإشارات العشوائية معلومات ويجب ألا يحدث التباس بينها وبين التشويش الذى غالباً ما يصاحبها . والجهد الناشئ من الكلام المنطوق على طرفى الميكرفون والإشارات التى يلتقطها هوائى الراديو والتلفزيون

من محطات الإرسال تعتبر أمثلة للإشارات العشوائية . وخواص هذه الإشارات وقيمها يمكن تقديرها فقط بشكل عام كقيمة متوسطة وليس بشكل دقيق . كما توجد أمثلة أخرى للإشارات العشوائية وهى الناتجة من الموجات الثنائية فى الحاسبات الرقمية والشكل العام المكون للصور أو الحديث أو الموسيقى التى تعدل قيم الموجات الحاملة فى نظام التعديل القيمى AM .

وربما يبدو من غير المفيد مناقشة الإشارات التى تعرف بشكل عام كقيمة متوسطة ومع هذا فإنه عند تحليل التوافقيات فإننا نحصل على الكثير من تفاصيل التأثير العام لهذه الإشارات فى الدوائر الكهربية .

مثـــال 6-25 : أخذت عينات من إشارة عشوائية x(t) كل 1 ms ارمز لها بالرمز x(n) . بين تقريباً القيمة المتوسطة والقيمة المتوسطة الفعالة للإشارة x(t) من العينات المعطاة فى جدول 6-2 .

جـــدول 6-2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x(n)	2	4	11	5	7	6	9	10	3	6	8	4	1	3	5	12

القيــم المتوسطة بالنسبة للزمن للإشارة x(t)، وقيــم المربعــات $x^2(t)$ يمكن أخــذها تقريباً من قيــم x(n) .

$$X_{avg} = (2+4+11+5+7+6+9+10+3+6+8+4+1+3+5+12)/16 = 6$$
$$X^2_{eff} = (2^2+4^2+11^2+5^2+7^2+6^2+9^2+10^2+3^2+6^2+8^2+4^2+1^2+3^2+5^2+12^2)/16 = 46$$
$$X_{eff} = 6.78$$

مثـــال 6-26 : إشارة ثنائية $\upsilon(t)$ هى إما 0.5+ ، 0.5 V- تغير إشارتها كل فترة زمنية قيمتها 1 ms . ووقت حدوث التغير ليس معروفاً مسبقاً ولكن عدد مرات التغير الموجب = عدد مرات التغير السالب، ولذلك فإنه عند قياسها لزمن طويل فإن فترة بقائها بالقيمة 0.5 V+ هو نفس بقائها فى القيمة 0.5 V- . أحسب القيمة المتوسطة والفعالة فى زمن قدره 10 s .

خلال فترة الـ 10 s يوجد 10000 تغير كل منها يمكث 1-ms ولذلك فإن القيمة المتوسطة للإشارة $\upsilon(t)$ يمكن بيانها تقريباً كالتالى :

والقيمة المؤثرة للإشارة $\upsilon(t)$ هى :

$$V_{eff}^2 = [(0.5)^2 \times 5000 + (-0.5)^2 \times 5000]/10,000 = (0.5)^2 \qquad \text{or} \qquad V_{eff} = 0.5 \text{ V}$$

القيمة V_{eff} لا تعتمد على عدد الفترات .

أمثلة محلولة

6-1 أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للإشارة $\upsilon = 1 + 2 \sin (\omega t + \theta)$ إذا كان $\omega = 1000$ s ، $\theta = 3$ rad . حدد ما إذا كانت الدالة υ دورية ثم أوجد ترددها f وفترة دورتها T وحدد زاوية الوجه بالدرجات .

$$V_{max} = 1 + 2 = 3 \qquad V_{min} = 1 - 2 = -1$$

الدالة υ دورية ولإيجاد التردد ودورتها نلاحظ أن $\omega = 2\pi f = 1000$ rad/s لذلك :

$$f = 1000/2\pi = 159.15 \text{ Hz} \qquad \text{and} \qquad T = 1/f = 2\pi/1000 = 0.00628 \text{ s} = 6.28 \text{ ms}$$

زاوية الوجه = $3 \text{ rad} = 180° \times 3/\pi = 171.9°$

6-2 فى نظام قياس الموجات المتناهية الصغر فإن إشارة كهرومغناطيسية $\upsilon_1 = A \sin 2\pi ft$ ذو تردد $f = 100$ MH قد أرسلت ثم سجل صداها $\upsilon_2(t)$ من الهدف . فإذا كان الزمن بين الإشارة وصداها هو τ . (أ) أكتب تعبيراً للإشارة $\upsilon_2(t)$ وأحسب زاوية الوجه لزمن تأخير $\tau_1 = 515$ ns ، $\tau_2 = 555$ ns . (ب) هل يمكن حساب المسافة بطريقة واضحة من زاوية الوجه للإشارة $\upsilon_2(t)$؟ وإذا لم يتيسر فاذكر المعلومات الإضافية المطلوبة .

(أ)

Let $v_2(t) = B \sin 2\pi f(t - \tau) = B \sin (2\pi ft - \theta)$.
For $f = 100 \text{ MHz} = 10^8$ Hz, $\theta = 2\pi f\tau = 2 \times 10^8 \pi\tau = 2\pi k + \phi$ where $0 < \phi < 2\pi$.
For $\tau_1 = 515 \times 10^{-9}$, $\theta_1 = 2\pi 10^8 \times 515 \times 10^{-9} = 103\pi = 51 \times 2\pi + \phi_1$ or $k_1 = 51$ and $\phi_1 = \pi$.
For $\tau_2 = 555 \times 10^{-9}$, $\theta_2 = 2\pi 10^8 \times 555 \times 10^{-9} = 111\pi = 55 \times 2\pi + \phi_2$ or $k_2 = 55$ and $\phi_2 = \pi$.

(ب) حيث أن زاويتى الوجه θ_1 ، θ_2 متساويتان فإن زمنى التأخير τ_1 ، τ_2 يصعب التمييز بينهما اعتماداً على زاوية الوجه θ_1 ، θ_2 ولفك هذا الإبهام فإن كلاً من k ، θ مطلوب لهذا الأمر .

6-3 إذا كانت الدورة T_1 ، T_2 للدالتين الدورتين $\upsilon_1(t)$ ، $\upsilon_2(t)$ لهما مضروب مشترك فإن مجموع الدالتين $\upsilon(t) = \upsilon_1(t) + \upsilon_2(t)$ هى دالة دورية ذات دورة مساوية لأصغر مضروب مشترك لأى من T_1 ، T_2 وبين فى هذه الحالة أن $V_{avg} = V_{1,avg} + V_{2,avg}$.

إذا اخترنا رقمين صحيحين n_1 ، n_2 بحيث $T = n_1T_1 = n_2T_2$ فإن $\upsilon_1(t) = \upsilon_1 (t + n_1T_1)$ ، $\upsilon_2(t) = \upsilon_2 (t + n_2T_2)$ وبالتالى :

$$v(t+T) = v_1(t+T) + v_2(t+T) = v_1(t) + v_2(t) = v(t)$$

وتكون $\upsilon(t)$ دورية بدورة T .

القيمة المتوسطة هى :

$$V_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T [v_1(t) + v_2(t)]\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T v_1(t)\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T v_2(t)\, dt = V_{1,avg} + V_{2,avg}$$

6-4 بين أن متوسط قيمة الدالة $\cos^2(\omega t + \theta)$ هى 1/2 .

باستخدام المتماثلات $\cos^2(\omega t + \theta) = 1/2\, [1 + \cos 2(\omega t + \theta)]$ والتعبير $f(t) = F_{avg}$ وناتج المسألة رقم 6.3 نحصل على :

$$\langle 1 + \cos 2(\omega t + \theta)\rangle = \langle 1\rangle + \langle \cos 2(\omega t + \theta)\rangle$$

But $\langle \cos 2(\omega t + \theta)\rangle = 0$. Therefore, $\langle \cos^2(\omega t + \theta)\rangle = 1/2$.

6-5 إذا كان $\upsilon(t) = Vdc + Vac \cos(\omega t + \theta)$ بين أن $V^2_{eff} = V^2_{dc} + (1/2)V^2_{ac}$.

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [V_{dc} + V_{ac}\cos(\omega t + \theta)]^2\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T [V_{dc}^2 + V_{ac}^2\cos^2(\omega t + \theta) + 2V_{dc}V_{ac}\cos(\omega t + \theta)]\, dt$$

$$= V_{dc}^2 + \tfrac{1}{2}V_{ac}^2$$

وأيضاً يمكن كتابة :

$$\begin{aligned}V_{eff}^2 = \langle v^2(t)\rangle &= \langle [V_{dc} + V_{ac}\cos(\omega t + \theta)]^2\rangle \\ &= \langle V_{dc}^2 + V_{ac}^2\cos^2(\omega t + \theta) + 2V_{dc}V_{ac}\cos(\omega t + \theta)\rangle \\ &= V_{dc}^2 + V_{ac}^2\langle\cos^2(\omega t + \theta)\rangle + 2V_{dc}V_{ac}\langle\cos(\omega t + \theta)\rangle \\ &= V_{dc}^2 + \tfrac{1}{2}V_{ac}^2\end{aligned}$$

6-6 إذا كان الترددان f_1 ، f_2 توافقيان مختلفان للتردد f_0 بين أن القيمة الفعالة للدالة :

$$\begin{aligned}v^2(t) &= V_1^2\cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) + V_2^2\cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \\ &\quad + 2V_1V_2\cos(2\pi f_1 t + \theta_1)\cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \\ V_{eff}^2 = \langle v^2(t)\rangle &= V_1^2\langle\cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1)\rangle + V_2^2\langle\cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2)\rangle \\ &\quad + 2V_1V_2\langle\cos(2\pi f_1 t + \theta_1)\cos(2\pi f_2 t + \theta_2)\rangle\end{aligned}$$

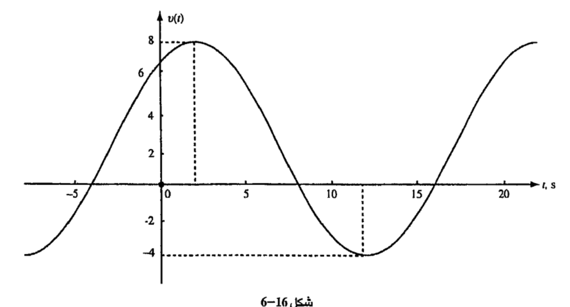
ولكن : $\langle\cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1)\rangle = \langle\cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2)\rangle = 1/2$ راجع مسألة 6-4 و

$$\begin{aligned}\langle\cos(2\pi f_1 t + \theta_1)\cos(2\pi f_2 t + \theta_2)\rangle &= \langle\cos[2\pi(f_1 + f_2)t + (\theta_1 + \theta_2)]\rangle \\ &\quad + \langle\cos[2\pi(f_1 - f_2)t + (\theta_1 - \theta_2)]\rangle = 0\end{aligned}$$

لذلك :

$$V_{eff}^2 = \tfrac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2) \text{ and } V_{eff} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)}.$$

6-7 إذا كانت الإشارة $v(t)$ فى شكل 6-16 جيبية أوجد دورتها وترددها . ثم عبر عنها بالشكل $v(t) = A + B\cos(\omega t + \theta)$ وأوجد قيمتها المتوسطة وقيمتها الفعالة .



شكل 6-16

الزمن بين قيمتين عظيمين موجبتين $T = 20$ s هى دورة واحدة لتردد $f = 0.05$ Hz . والإشارة هى دالة جيب تمام بقيمة عظمى B مضاف إلى قيمة ثابتة A .

$$B = \frac{1}{2}(V_{max} - V_{min}) = \frac{1}{2}(8 + 4) = 6 \qquad A = V_{max} - B = V_{min} + B = 2$$

ومنحنى جيب التمام مرحل بمقدار ثانيتين إلى اليمين والذى يؤدى إلى زاوية تأخر قيمتها $360\ (2/20) = 36°$ ولذلك فإننا نعبر عن الإشارة بالتالى :

$$v(t) = 2 + 6\cos\left(\frac{\pi}{10}t - 36°\right)$$

ويمكن الحصول على القيمة المتوسطة والفعالة من A ، B .

$$V_{avg} = A = 2, \qquad V_{eff}^2 = A^2 + B^2/2 = 2^2 + 6^2/2 = 22 \quad \text{or} \quad V_{eff} = \sqrt{22} = 4.69$$

6-8 إذا كان $\upsilon_1 = \cos 200\pi t$ ، $\upsilon_2 = \cos 202\pi t$. بين أن $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$ هى دالة دورية وأوجد دورتها V_{max} والأزمنة التى تكون فيها υ ذات قيم عظمى .

دورات كل من υ_1 ، υ_2 هما $T_1 = 1/100$ s ، $T_2 = 1/101$ s على التوالى دورة $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$ هى أصغر مضروب مشترك لكل من T_1 ، T_2 والتى هى $T = 100T_1 = 101T_2 = 1$ s . والقيمة العظمى للجهد υ تحدث عند $t = k$ عندما تكون k مقدار صحيح حينما تكون υ_1 ، υ_2 عند قيمتها العظمى وتكون $V_{max} = 2$.

6-9 حول المعادلة $\upsilon(t) = 3\cos 100t + 4\sin 100t$ لتكون $A\sin(100t + \theta)$.

Note that $3/\sqrt{3^2 + 4^2} = 3/5 = \sin 36.87°$ and $4/\sqrt{3^2 + 4^2} = 4/5 = \cos 36.87°$. Then,

$$v(t) = 3\cos 100t + 4\sin 100t = 5(0.6\cos 100t + 0.8\sin 100t)$$
$$= 5(\sin 36.87° \cos 100t + \cos 36.87° \sin 100t) = 5\sin(100t + 36.87°)$$

6-10 أوجد القيمة المتوسطة والفعالة للدالة $\upsilon_2(t)$ المبينة فى شكل 6-1(b) إذا كانت $V_1 = 2$ ، $V_2 = 1$ ، $T = 4T_1$.

$$V_{2,avg} = \frac{V_1T_1 - V_2(T - T_1)}{T} = \frac{V_1 - 3V_2}{4} = -0.25$$

$$V_{2,eff}^2 = \frac{V_1^2T_1 + V_2^2(T - T_1)}{T} = \frac{7}{4} \qquad \text{or} \qquad V_{2,eff} = \sqrt{7}/2 = 1.32$$

6-11 أوجد $V_{3,avg}$ ، $V_{3,eff}$ فى شكل 6-1(c) حينما $T = 100\ T_1$.

من شكل 6-1(c) : $V_{3,avg} = 0$ ولإيجاد $V_{3,eff}$ لاحظ أن تكامل υ_3^2 لدورة واحدة هى $V_0{}^2T_1/2$ والقيمة المتوسطة لـ $\upsilon_3{}^2$ للفترة $T = 100T_1$ تكون :

$$\langle \upsilon_3^2(t) \rangle = V_{3,eff}^2 = V_0^2 T_1/200T_1 = V_0^2/200 \qquad \text{or} \qquad V_{3,eff} = V_0\sqrt{2}/20 = 0.0707V_0$$

وبذلك تقل القيمة الفعالة بالمعامل $\sqrt{T/T_1} = 10$.

6-12 بالرجوع لشكل 6-1(d) وإذا كان $T = 6$ وكانت المساحة فى الجزء الموجب والجزء السالب من الدالة $\upsilon_4(t)$ هى 5+، 3- على التوالى . أوجد القيمة المتوسطة والفعالة للدالة $\upsilon_4(t)$.

$$V_{4,avg} = (5-3)/6 = 1/3$$

لا يمكن الحصول على القيمة الفعالة من المعلومات المعطاة .

6-13 أوجد القيمة المتوسطة والفعالة لنصف موجة جيب التمام الموحدة $\upsilon_1(t)$ المبينة شكل 6-17(a) .

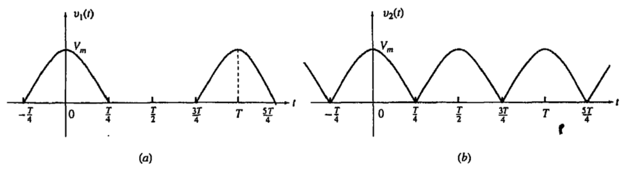
$$V_{1,avg} = \frac{V_m}{T}\int_{-T/4}^{T/4} \cos\frac{2\pi t}{T}\,dt = \frac{V_m T}{2\pi T}\left[\sin\frac{2\pi t}{T}\right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_m}{\pi}$$

$$V_{1,eff}^2 = \frac{V_m^2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} \cos^2\frac{2\pi t}{T}\,dt = \frac{V_m^2}{2T}\int_{-T/4}^{T/4}\left(1+\cos\frac{4\pi t}{T}\right)dt$$

$$= \frac{V_m^2}{2T}\left[t + \frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{T}\right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_m^2}{2T}\left(\frac{T}{4}+\frac{T}{4}\right) = \frac{V_m^2}{4}$$

والتى منها $V_{1,eff} = V_m/2$.

6-14 أوجد القيمة المتوسطة والفعالة فى موجبة جيب التمام ذات التوحيد الكامل $\upsilon_2'(t) = V_m|\cos 2\pi t/T|$ المبينة شكل 6-17(b) .



(a) (b)

شكل 6-17

استخدم نتائج المسألة 6-5 ، 6-13 لإيجاد $V_{2,avg}$ ولذلك :

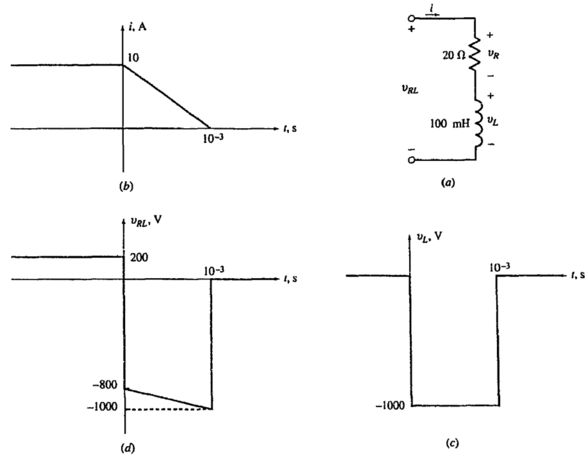
$$v_2(t) = v_1(t) + v_1(t - T/2) \qquad \text{and} \qquad V_{2,avg} = V_{1,avg} + V_{1,avg} = 2V_{1,avg} = 2V_m/\pi$$

استخدم نتائج المسألة 6-5 ، 6-13 لإيجاد $V_{2,eff}$ وبذلك :

$$V^2_{2,eff} = V^2_{1,eff} + V^2_{1,eff} = 2V^2_{1,eff} = V^2_m/2 \qquad \text{or} \qquad V_{2,eff} = V_m/\sqrt{2}$$

القيمة الفعالة للدالة $v_2(t)$ يمكن أيضاً استنتاجها مباشرة . وبسبب عمليات التربيع فإن دالة جيب التمام الموحدة كاملاً لها نفس القيم الفعالة كما لدالة جيب التمام نفسها والتى هى $V_m/\sqrt{2}$.

6-15 عنصر حثى قيمته 100-mH على التوالى مع مقاومة 20-Ω [شكل 6-18(a)] يحمل التيار i كما هو مبين شكل 6-18(b) . أوجد وارسم الجهود على طرفى R ، L ، RL .



شكل 6–18

$$i = \begin{cases} 10 \\ 10(1-10^3 t) \quad (A) \\ 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{for } t<0 \\ -10^4 \text{ A/s} & \text{for } 0<t<10^{-3}\text{ s} \\ 0 & \text{for } t>10^{-3}\text{ s} \end{cases}$$

$$v_R = \text{Ri} = \begin{cases} 200\text{ V} \\ 200(1-10^3 t) \quad (V) \\ 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad v_L = L\frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{for } t<0 \\ -1000\text{ V} & \text{for } 0<t<10^{-3}\text{ s} \\ 0 & \text{for } t>10^{-3}\text{ s} \end{cases}$$

وحيث أن العناصر الغير فعالة على التوالى فإن $v_{RL} = v_R + v_L$ وبذلك :

$$v_{RL} = \begin{cases} 200\text{ V} & \text{for } t<0 \\ -2(10^5 t) - 800 \quad (V) & \text{for } 0<t<10^{-3}\text{ s} \\ 0 & \text{for } t>10^{-3}\text{ s} \end{cases}$$

ورسم العلاقات لكل من v_L، v_{RL} مبينة فى شكلى 6-18(c)، (d) على التوالى ورسم علاقة الجهد v_R لها نفس الشكل مثل علاقة التيار [انظر شكل 6.18(b)] مع اختلاف مقياس الرسم الذى هو مضروب فى 20+ .

6-16 إشـارة رادار s(t) قيمتـها العظمـى $V_m = 100V$ تتكون من دفعات منتظمة متكـررة كل دفعة تستمر $T_b = 50\ \mu s$ وتتكرر الدفعات كل $T_2 = 10$ ms . أوجد S_{eff} والقدرة المتوسطة فى s(t) .

إذا كـان $V_{eff} = V_m/\sqrt{2}$ هى القيمـة الفعالة للدفعة الجيبية فإن الطاقة التى تحتوى عليها دفعة واحدة هى $W_b = T_b\ V^2_{eff}$ والطـاقة التى تحـتويها فـترة واحـدة من s(t) هى $W_s = T_s S^2_{eff}$ حيث $W = W_b = W_s$ وبذلك نحصل على :

$$T_b V^2_{eff} = T_s S^2_{eff} \qquad S^2_{eff} = (T_b/T_s)V^2_{eff} \qquad S_{eff} = \sqrt{T_b/T_s}\,V_{eff} \tag{40}$$

وبالتعويض فى قيم T_s، T_b، V_{eff} فى المعادلة (40) نحصل على :

$$S_{eff} = \sqrt{(50\times10^{-6})/(10\times10^{-3})}\,(100/\sqrt{2} = 5\text{ V}$$

وبذلك $W = 10^{-2}\ (25) = 0.25J$ والقيمة المتوسطة للقدرة فى s(t) هى :

$$P = W/T_s = T_s S^2_{eff}/T_s = S^2_{eff} = 25\text{ W}$$

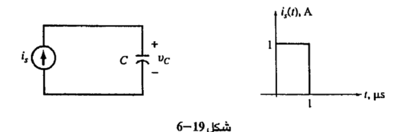
القدرة المتوسطة للدالة s(t) هى S^2_{eff} وقيمته العظمى هى بقيمة V^2_{eff} والنسبة بين القيمة العظمى للقدرة إلى القيمـة المتوسطة للقـدرة هى $\sqrt{T_s/T_b}$، وفى هذا المثال فإن القيمة المتوسطة للقـدرة والقيـمة العظمى هما 25 W، 5000 W على التوالى .

6-17 أحد الجهود المستعملة هو $V_{eff} = 120$ V عند التردد 60 Hz ويسحب تياراً $I_{eff} = 10$ A عند زاوية وجه °60 متأخر – عبر عن كل من i و v و $p = vi$ كدالة للزمن وبين أن دالة القدرة دورية بالإضافة إلى قيمة ثابتة كقيمة تيار . أوجد التردد والقيمة المتوسطة والعظمى والصغرى للمقدار p .

$$v = 120\sqrt{2}\cos\omega t \qquad i = 10\sqrt{2}\cos(\omega t - 60°)$$

دالة القدرة دورية والتردد $f = 2 \times 60 = 120$ والقدرة المتوسطة $p_{avg} = 600$ W والقدرة العظمى $p_{max} = 600 + 1200 = 1800$ W . والقدرة الصغرى $p_{min} = 600 - 1200 = -600$ W .

6-18 نبضة ضيقة i_s ذات قيمة عظمى 1-A وفترة استمرار 1-µs سلطت على مكثف 1-µF عند الزمن $t = 0$ كما هو مبين شكل 6-19 فإذا كان المكثف ابتداءً غير مشحون فأوجد الجهد على طرفيه .



شكل 19–6

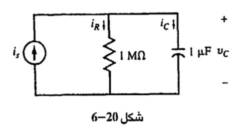
الجهد على طرفى المكثف هو :

$$V_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 10^6 t \quad \text{(V)} & \text{for } 0 < t < 1\ \mu s \text{ (charging period)} \\ 1\text{ V} & \text{for } t > 1\ \mu s \end{cases}$$

وإذا كان المكثف مشحون بنفس الكمية عند الزمن صفر فإننانحصل على :

$$v = u(t)\ \text{(V) and } i(t) = 10^{-6}\delta(t)\ \text{(A).}$$

6-19 النبضة الضيقة المذكورة فى المسألة 6-18 سلطت على دائرة توازى مكونة من مكثف 1-µF ومقاومة 1-MΩ كما فى شكل 6-20 . وإذا اعتبرنا أن النبضة تنتهى عند $t = 0$ وأن المكثف ابتداءً غير مشحون . فأوجد الجهد على طرفى مجموعة التوازى RC .



شكل 6-20

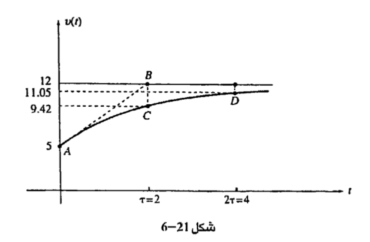
إذا رمزنا بالقيمة v للجهد على طرفى مجموعة التوازى RC فإن التيار فى R هو $i_R = v/R = 10^{-6}v$. وأثناء النبضة يبقى i_R مهملاً لأن v لا تتعدى 1 V والتيار i_R يبقى أقل من $1\mu A$. وبذلك يكون من المنطقى اعتبار أن $i_C = 1A$ أثناء النبضة وبالتالى $v(0)^+ = 1V$. وعند التيار $t > 0$ فإنه بتطبيق KVL حول حلقة RC المغلقة فإن :

$$v + \frac{dv}{dt} = 0, \qquad v(0^+) = 1\text{ V} \tag{41}$$

والحل الوحيد للمعادلة (41) هو $v = e^{-t}$ لقيم $t > 0$ أو $v = e^{-t}\, u(t)$ لجميع قيم t . وفى الاستخدامات العملية يمكن اعتبار i_s دفعة حجمها $10^{-6}A$ وبالتالى فإن $v = e^{-t}\mu(t)$ تسمى الاستجابة لمركبة RC لدفعة التيار .

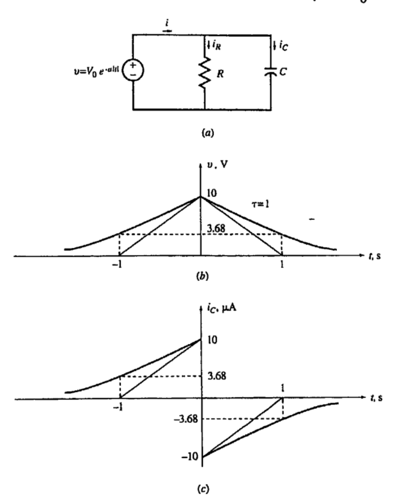
6-20 ارسم الدالة $v(t)$ التى تتغير أسياً من 5 V عند $t = 0$ إلى 12 V عند $t = \infty$ بثابت زمن قدره 2 s . أكتب معادلة $v(t)$.

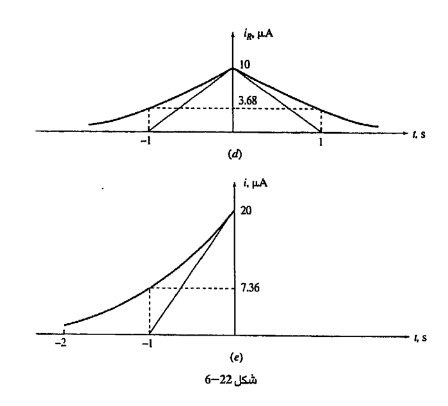
حدد نقطة البداية $A\ (t = 0\ ,\ v = 5)$ ، وخط الجهد $v = 12$ كما فى شكل 6-21 . المماس عند النقطة A يتقاطع مع خط الجهد المشار إليه عند $t = 2$ وهى النقطة B على الخط . ارسم خط المماس AB . حدد النقطة C على المنحنى عند $t = 2$. للحصول على تمثيل أدق للمنحنى حدد النقطة D عند $t = 4$. ارسم المنحنى كما هو مبين . المعادلة هى : $v(t) = Ae^{-t/2} + B$. من حالتى الابتداء والنهاية نحصل على $v(0) = A + B = 5$ ، $v(\infty) = B = 12$ أو $A = -7$ ، $v(t) = -7e^{-t/2} + 12$.



شكل 6–21

6-21 وصل الجهد $v = V_0e^{-a|t|}$ لقيم $a > 0$ بمجموعة توازى مكونة من مقاومة ومكثف كما هو مبين شكل 6-22(a) . (أ) أوجد التيارات i_C ، i_R ، $i = i_C + i_R$. (ب) أحسب وارسم المنحنى v ، i_C ، i_R ، i لقيم $V_0 = 10$ V ، $C = 1\mu F$ ، $R = 1$ MΩ ، $a = 1$.





شكل 22–6

(أ) انظر الجزء (a) فى جدول 3-6 للحصول على قيم التيارات المطلوبة .

جـــدول 3-6

	Time	υ	$i_C = C\,d\upsilon/dt$	$i_R = \upsilon/R$	$i = i_C + i_R$
(a)	$t < 0$	$\upsilon = V_0 e^{at}$	$i_C = CV_0 e^{at}$	$i_R = (V_0/R)e^{at}$	$i = \upsilon_0\,(Ca + 1/R)e^{at}$
	$t > 0$	$\upsilon = V_0 e^{-at}$	$i_C = CV_0 e^{-at}$	$i_R = (V_0/R)e^{-at}$	$i = V_0\,(Ca + 1/R)e^{-at}$
(b)	$t < 0$	$\upsilon = V_0 e^{t}$	$i_C = 10^{-5}e^{t}$	$i_R = 10^{-5}e^{t}$	$i = 2\,(10^{-5}e^{t})$
	$t > 0$	$\upsilon = V_0 e^{-t}$	$i_C = 10^{-5}e^{-t}$	$i_R = 10^{-5}e^{-t}$	$i = 0$

(ب) انظر (b) فى جدول 3-6 . الأشكال من 22-6 إلى 6-22(e) تبين كل من υ ، i_C ، i_R ، i على التوالى طبقاً للمعلومات المعطاة . أثناء $t > 0$ فإن $i = 0$ ولا يغذى جهد المنبع مركبة RC بأى تيار ويقوم المكثف بأمداد المقاومة بالتيار اللازم لاستمرارية الجهد الأسى على طرفيها .

مسائل إضافية

6-22 إذا كان $\upsilon_1 = 8 \sin 100\pi t$، $\upsilon_2 = 6 \sin 99\pi t$. بين أن $\upsilon = \upsilon_1$ هى دالـة دورية. أوجد زمـن الدورة وكلاً من القيمـة المتوسطة والعظمى والفعالة للدالـة υ. الجواب: $T = 2$، $V_{max} = 14$، $V_{avg} = 0$، $V_{eff} = 5\sqrt{2}$.

6-23 للدالة $\upsilon(t) = 2 + 6 \cos (10\pi t + \pi/6)$. أوجد كـلاً من زمن الدورة، التردد، زاوية الوجه بالدرجات، القيمة العظمى والصغـرى والمتوسطة والفعالـة لهذه الدالة. الجواب: $T = 0.2$ s، $f = 5$ Hz، زاوية الوجه $= 30°$، $V_{max} = 8$، $V_{min} = -4$، $V_{avg} = 2$، $V_{eff} = \sqrt{22}$.

6-24 أوجد ثوابت المعادلة $\upsilon(t) = 2 \cos (\omega t + 30°) + 3 \cos \omega t$ لتكون $\upsilon(t) = A \sin (\omega t + \theta)$. الجواب: $A = 4.84$، $\theta = 102°$.

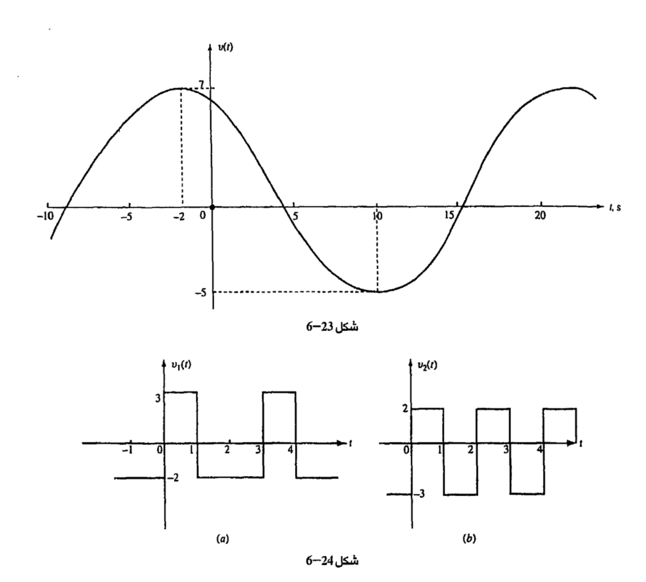
6-25 للشكل المرسوم (b)1-6. أوجد $V_{2,avg}$، $V_{2,eff}$ لقيم $V_1 = V_2 = 3$، $T = 4\, T_1/3$. الجواب: $V_{2,avg} = 1.5$، $V_{2,eff} = 3$.

6-26 أعد حل المسألة 6-25 لقيم $V_1 = 0$، $V_2 = 4$، $T = 2T_1$. الجواب: $V_{2,avg} = -2$، $V_{2,eff} = 2\sqrt{2}$

6-27 فى شكل (c)1-6 أوجد $V_{3,avg}$، $V_{3,eff}$ لقيم $V_0 = 2$، $T = 200T_1$. الجواب: $V_{3,avg} = 0$، $V_{3,eff} = 0.1$.

6-28 شكل 6-23 يوضح به موجه جيبية. عبر عنها بالصورة $\upsilon = A + B \sin (\omega t + \theta)$ ثم أوجد قيمتها المتوسطة والفعالة. الجواب: $\upsilon(t) = 1 + 6 \sin (\pi t/12 + 120°)$، $V_{avg} = 1$، $V_{eff} = \sqrt{19}$.

6-29 أوجد القيمة المتوسطة والفعالة للدالة $\upsilon(t)$ فى شكل (a)24-6 والدالة $\upsilon_2(t)$ فى شكل (b)24-6.
الجواب: $V_{1,avg} = (1/3)$، $V_{1,eff} = \sqrt{(17/3)}$، $V_{2,avg} = (1/2)$، $V_{2eff} = \sqrt{(13/2)}$.



شكل 6–23

شكل 6–24

6-30 إذا كان التيار فى دائـــرة التـــوالى RL والتى بها $R = 5\Omega$ ، $L = 10$ H فى شكل 6-10(a) حيث $T = 1$ s أوجد الجهد على طرفى RL .

الجواب :

$$v = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 10 + 5t & \text{for } 0 < t < 1 \\ 5 & \text{for } t > 1 \end{cases}$$

6-31 أوجد تيار المكثف فى المسألة 6-19 لشكل 6-20 لجميع قيم t .

الجواب : $i_C = 10^{-6}\,[\delta(t) - e^{-t}\,\upsilon(t)]$

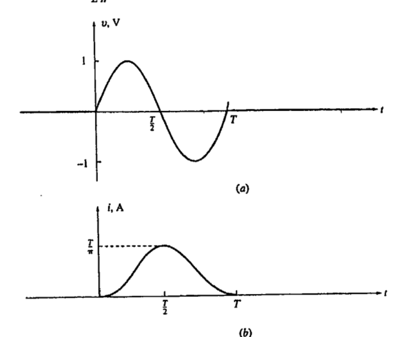
6-32 الجهد على طرفى عنصر حثى 1-H مكون من دورة جيبية واحدة كما هو مبين شكل 6-25(a).
(أ) أكتب معادلة $\upsilon(t)$. (ب) أوجد وارسم التيار على العنصر الحثى. (جـ) أوجد قيمة وزمن حدوث الطاقة العظمى فى العنصر.

الجواب:

$$(a)\quad v = [u(t) - u(t-T)]\sin\frac{2\pi t}{T}\quad (\text{V})$$

$$(b)\quad i = (T/2\pi)[u(t) - u(t-T)]\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{T}\right)\quad (\text{A}).\quad \text{See Fig. 6-25}(b).$$

$$(c)\quad W_{max} = \frac{1}{2\pi^2}T^2\quad (\text{J})\quad \text{at } t = T/2$$



شكل 6–25

6-33 أكتب معادلة الدالة $\upsilon(t)$ التى تتناقص أسياً من 7 عند $t = 0$ إلى 3 عند $t = \infty$ بثابت زمن قدره 200 ms. الجواب: $\upsilon(t) = 3 + 4e^{-st}$ لقيم $t > 0$.

6-34 أكتب علاقة الدالة $\upsilon(t)$ التى تزداد أسياً بثابت زمنى 0.8 s صفر عند $t = -\infty$ إلى 9 عند $t = 0$
الجواب: $\upsilon(t) = 9e^{5t/4}$ لقيم $t < 0$.

6-35 أكتب التيار فى شكل 6-6 بدلالة دالة الوحدة.

الجواب:
$$i(t) = 4u(t) + 6\sum_{k=1}^{\infty}[u(t-5k) - u(t-5k+2)]$$

6-36 فى شكل 6-10(a) إذا كان $T = 1$ وباستدعاء الشكل الموجى $s_1(t)$. عبر عن $s_1(t)$ والمشتقة الأولى والثانية لها ds_1/dt ، d^2s_1/dt^2 باستخدام دالتى النبضة والدفعة.

الجواب : $s_1(t) = [u(t) - u(t-1)]t + u(t-1),\ ds_1/dt = u(t) - u(t-1),\ d^2s_1/dt^2 = \delta(t) - \delta(t-1)$

6-37 أوجد الجهد الدفعى الذى يتسبب فى تيار فجائى قيمته 1 A عند $t = 0$ حينما يسلط على عنصر حثى 10 mH. الجواب : $\upsilon(t) = 10^{-2}\, d(t)$ V.

6-38 إذا كان $\upsilon_1 = \cos t$ ، $\upsilon_2 = \cos(t + 30°)$ ، $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$ أكتب υ على صورة دالة جيب تمام واحدة $\upsilon = A\cos(t + \theta)$. (ب) أوجد القيم الفعالة لكل من υ_1 ، υ_2 ، υ. ناقش لماذا $V^2_{eff} > (V^2_{1,eff} + V^2_{2,eff})$.

الجواب : (أ) $\upsilon = 1.93\cos(t + 15°)$. (ب) $V_{1,eff} = V_{2,eff} = 0.707$ ، $V_{eff} = 1.366$. وقد استنتجت V_{eff} من العلاقة التالية :

$$V^2_{eff} = \langle \upsilon^2 \rangle = \langle (\upsilon_1 + \upsilon_2)^2 \rangle = \langle \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2 \rangle = \langle \upsilon_1^2 \rangle + \langle \upsilon_2^2 \rangle + 2\langle \upsilon_1\upsilon_2 \rangle$$

حيث أن υ_1 ، υ_2 لها نفس التردد وزاوية الوجه بينهما 30° فإننا نحصل على

$$(V_1V_2) = (1/2)\cos 30° = \sqrt{3}/4$$

التى تكون موجبة وبذلك $V^2_{eff} > (V^2_{1,eff} + V^2_{2,eff})$.

6-39 (أ) بين أن المعادلة $\upsilon_1 = \cos t + \cos\sqrt{2}t$ ليست دورية. (ب) استبدل قيمة $\sqrt{2}$ بالقيمة 1.4 ثم بين أن $\upsilon_2 = \cos t + \cos 1.4\, t$ دورية وأوجد دورتها T_2. (جـ) استبدل $\sqrt{2}$ بالقيمة 1.41 ثم أوجد الدورة T_3 للدالة $\upsilon_3 = \cos t + \cos 1.41\, t$. (د) استبدل $\sqrt{2}$ بالقيمة 1.4142 . وأوجد الدورة T_4 للدالة $\upsilon_4 = \cos t + \cos 1.4142\, t$. الجواب : (أ) $\sqrt{2}$ ليس رقماً جذرياً لذلك فإن υ_1 ليست دورية. (ب) $T_2 = 10\pi s$. (جـ) $T_3 = 200\pi s$. (د) $T_4 = 10000\pi s$.

6-40 إشارة عشوائية $s(t)$ قيمتها الفعالة 5V لها قيمة تيار مستمر 2V. أوجد القيمة الفعالة للدالة $s_0(t) = s(t) - 2$ عندما تحذف مركبة التيار المستمر.

الجواب : $s_{0,eff} = \sqrt{5^2 - 4} = \sqrt{21} = 4.58$ V.



الفصل السابع

دوائر الرتبة الأولى

7.1 مقدمـــة

كلما تغيرت الدائرة من حالة إلى أخرى إما بتغيير فى المنبع أو تغيير فى عناصر الدائرة ينتج عن ذلك فترة انتقالية يتغير فيها تيارات أفرع الدائرة وجهد عناصرها المختلفة من القيم السابقة إلى قيم جديدة. هذه الفترة تسمى بالفترة العابرة. وبعد انقضاء الفترة العابرة فإن الدائرة تعتبر فى حالة استقرار. وهنا نجد أن المعادلة التفاضلية الخطية التى تبين حالة الدائرة سيحتوى حلها على جزءان: الدالة المكملة (أو الحل المتجانس) والحل الخاص. فالدالة المكملة تعنى بالحالة العابرة والحل الخاص يختص بالحالة المستقرة.

فى هذا الفصل سنوجد استجابة دوائر الرتبة الأولى ذات القيم الابتدائية المختلفة والمنابع المختلفة. ومن ثم سنبحث عن حل تخمينى يقودنا لنفس الاستجابة بدون الدخول فى الحل القياسى للمعادلات التفاضلية وسنقوم أيضاً بحل المعادلات المتعلقة بالاستجابات الطبيعية والجبرية والسُلمية والدفعية بالإضافة إلى حالات التيار المستمر المستقرة وحالات الفصل والتوصيل للعناصر الحثية والمكثفات.

7-2 تفريغ المكثف فى المقاومة

إذا اعتبرنا مكثفاً فرق جهد لوحية V_0. فإنه حينما يوجد مسار توصيل R على طرفيه فإن الشحنة المختزنة ستنتقل من خلال المكثف من أحد اللوحين إلى الآخر مسببة تياراً i. وبذلك يتناقص جهد

المكثف υ تدريجياً إلى الصفر وفى نفس الوقت يصبح التيار صفراً. وفى الدائرة RC المبينة شكل 7-7(a) فإن $Ri = \upsilon$، $i = c\, d\upsilon/dt$ وبحذف i فى كلا المعادلتين فإن:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = 0 \qquad (1)$$

والمعادلة الوحيدة ذات المركبة الخطية مع مشتقاتها الأولى والمساوية للصفر هى دالة أسية تأخذ الشكل Ae^{st}. وباستبدال υ بالقيمة Ae^{st}، $d\upsilon/dt$ بالقيمة SAe^{st} فى المعادلة رقم (1) نحصل على:

$$sAe^{st} + \frac{1}{RC} Ae^{st} = A\left(s + \frac{1}{RC}\right) e^{st} = 0$$

ومنها

$$s + \frac{1}{RC} = 0 \qquad \text{or} \qquad s = -\frac{1}{RC} \qquad (2)$$

وإذا كان $\upsilon(0) = A = V_0$، فإنه يمكن إيجاد $\upsilon(t)$، $i(t)$ كما يلى:

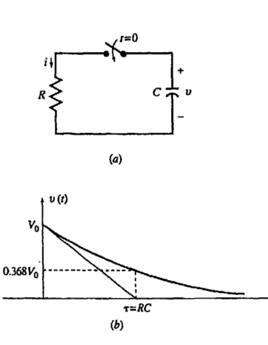
$$v(t) = V_0 e^{-t/RC}, \quad t > 0 \qquad (3)$$

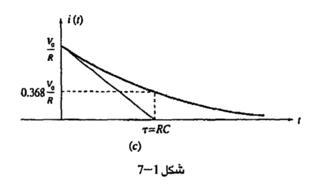
$$i(t) = -C\frac{dv}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}, \quad t > 0 \qquad (4)$$

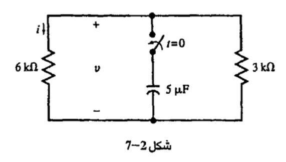
ويكون الجهد والتيار للمكثف قيم أسية بقيم ابتدائية V_0، V_0/R على التوالى وحينما يزداد الزمن فإن الجهد والتيار يصلان إلى الصفر بثابت زمنى $\tau = RC$. انظر شكل 7-1(b)، (c).

مثـــال 7-1 : إذا كان الجهد على طرفى مكثف 1-μF هو 10 V عند $t < 0$، عند $t = 0$ وصلت مقاومة 1-MΩ على طرفى المكثف أوجد ثابت الزمن τ والجهد $\upsilon(t)$ وقيمته عند الزمن $t = 5$ s.

$\tau = RC = 10^6(10^{-6})\text{ s} = 1\text{ s} \qquad v(t) = 10e^{-t}\text{ (V)}, \ t > 0 \qquad v(5) = 10e^{-5} = 0.067\text{ V}$







شكل 1–7

مثـــــال 2-7 : مكثف 5-µF له قيمة جهد ابتدائية 4 V متصل بمجموعة توازى مكونة من مقاومتين 3-kΩ، 6-kΩ شكل 2-7 . أوجد التيار i فى المقاومة 6-kΩ .

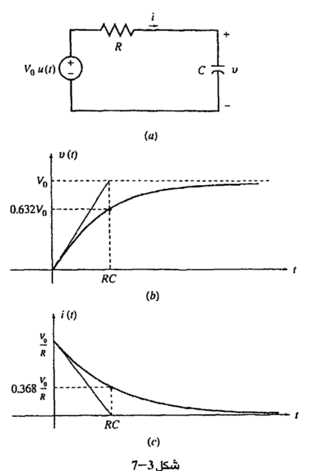
شكل 2–7

المقاومة المكافئة لمقاومتى التوازى هى $R = 2k\Omega$. ثابت الزمن للدائرة $RC = 10^{-2}$ s الجهد والتيار فى المقاومة $6k\Omega$ هما على التوالى .

$$v = 4e^{-100t} \text{ (V)} \qquad \text{and} \qquad i = v/6000 = 0.67e^{-100t} \text{ (mA)}$$

7-3 تكوين جهد التيار المستمر على طرفى المكثف

صل مكثف غير مشحون ابتداءً لبطارية ذات الجهد V_0 من خلال مقاومة عند الزمن $t = 0$. كالدائرة المبينة بشكل 7-3(a) .



شكل 3–7

لقيم $t > 0$ استخدم KVL حول الحلقة لتعطى $Ri + v = V_0$ ومنها بعد التعويض بالقيمة $i = C\,(dv/dt)$ تصبح :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{1}{RC}V_0 \qquad t > 0 \qquad (5a)$$

وباستخدام الحالة الابتدائية :

$$v(0^+) = v(0^-) = 0 \qquad (5b)$$

ويجب أن يحقق الحل كلاً من (5a)، (5b). وبالحل الخاص (أو الاستجاب الجبرية) فإنه $v_p(t) = V_0$ تحقق المعادلة (5a) ولكن لا تحقق المعادلة (5b). أما الحل المتجانس (أو الاستجابة الطبيعية) $v_A(t) = Ae^{-t/RC}$ يمكن إضافته وقيمته العظمى A يمكن ضبطها بحيث يكون الحل الكامل للمعادلة (6a) يحقق كلاً من (5a)، (5b).

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = V_0 + Ae^{-t/RC} \qquad (6a)$$

-من الحالة الابتدائية $v(0)^+ = V_0 + A = 0$ أو $A = -V_0$ ولذلك يكون الحل الكامل

$$v(t) = V_0(1 - e^{-t/RC})u(t) \qquad \text{[see Fig. 7-3(b)]} \qquad (6b)$$

[انظر شكل (7-3(b)]

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}u(t) \qquad \text{[see Fig. 7-3(c)]} \qquad (6c)$$

[انظر شكل (7-3(c)]

مثـــال 7-3 : مكثف 4-μF له قيمة جهد ابتدائية $v(0^-) = 2$ V متصلاً ببطارية 12V من خلال مقاومة $R = 5$ kΩ عند $t = 0$. أوجد الجهد على طرفى المكثف والتيار المار به عند $t > 0$.

ثابت الزمن للدائرة هو $\tau = RC = 0.025$ وبتتبع التحليل فى مثال 7-2 نحصل على :

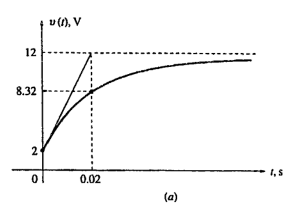
$$v(t) = 12 + Ae^{-50t}$$

من الحالات الابتدائية $v(0^-) = v(0^+) = 12 + A = 2$ أو $A = -10$ ولذلك فإنه عند $t > 0$.

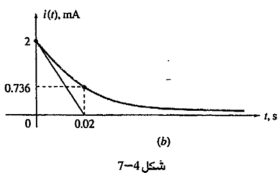
$$v(t) = 12 - 10e^{-50t} \text{ (V)}$$

$$i(t) = (12 - v)/5000 = 2 \times 10^{-3}e^{-50t}A = 2e^{-50t} \text{ (mA)}$$

ويمكن أيضاً حساب التيار من العلاقة $i = C(dv/dt)$. ويزداد الجهد نسبياً من القيمة الابتدائية 2V إلى القيمة النهائية 12V . بثابت الزمن 20 ms كما هو مبين شكل 7-4(a) بينما يتناقص التيار من القيمة 2 mA إلى الصفر كما هو مبين شكل 7-4(b).



(a)



(b)

شكل 4–7

7-4 دائـــرة RL خالية المنبـــع

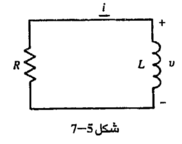
فى دائرة RL المبينة شكل 5-7 إفرض أنه عند $t = 0$ كان التيار I_0. وعند $t > 0$ يجب أن يحقق العلاقة $Ri + L\,(di/dt) = 0$. ومنها يكون الحل $i = Ae^{st}$. وبالتعويض نوجد قيمة كل من A ، S.

$$A(R + Ls)e^{st} = 0\,, \qquad R + Ls = 0\,, \qquad s = -R/L$$

الحالة الابتدائية $i(0) = A = I_0$ ومن ثم :

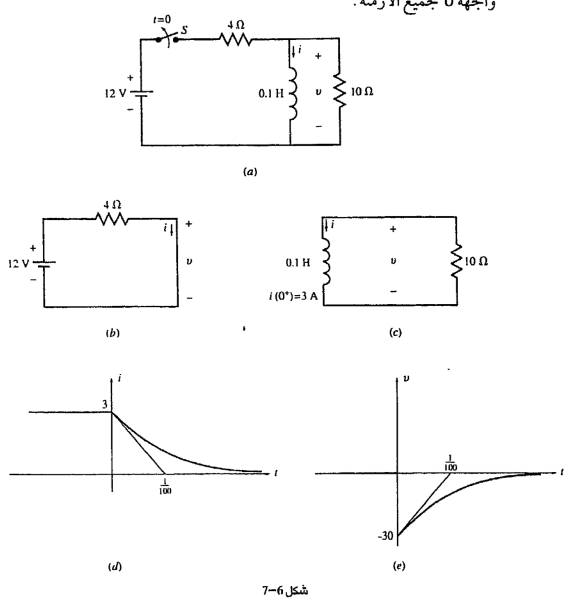
$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \qquad \text{for } t > 0$$

ثابت الزمن للدائرة هو L/R .



شكل 5–7

مثـــال 7-4 : فصلت البطارية 12-V المبينة شكل 7-6(a) عند الزمن $t = 0$. أوجد تيار العنصر الحثى والجهد v لجميع الأزمنة .



شكل 7−6

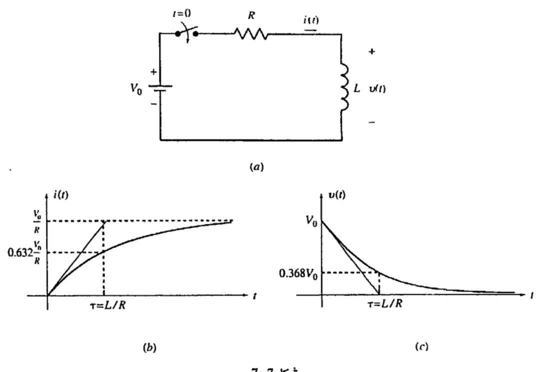
بفرض أن المفتاح S كان مغلقاً لفترة طويلة فإن تيار العنصر الحثى (الملف) يكون ثابتاً وجهده صفراً . ويكون التيار عند $t = 0$ كما هو مبين شكل 7-6(b) وقيمة التيار $i(0^-) = 12/4 = 3A$ وعند فصل البطارية عن $t > 0$ فإن التيار سيكون كما هو مبين شكل 7-6(c) . ولقيم $t > 0$ فإن التيار سيتناقص آسياً من القيمة 3A إلى الصفر . وثابت الزمن للدائرة هو $L/R = (1/100)s$ وباستخدام نتائج مثال 7-3 لقيم $t > 0$ فإن تيار الملف والجهد على التوالى يكون :

$$i(t) = 3e^{-100t} \quad (A)$$
$$v(t) = L(di/dt) = -30e^{-100t} \quad (V)$$

ورسم تغير كل من i(t)، υ(t) بالنسبة للزمن موضح فى شكل 7-6(d)، (c) على التوالى .

7-5 بناء تيــار مستمر فى الملـف :

إذا وصلنا منبع تيار مستمر فجأة لدائرة توالى RL ولم تكن الدائرة متصلة بأى منبع من قبل كما فى شكل 7-7(a) . فإن التيار سيزداد أسياً من القيمة صفر إلى قيمة ثابتة بثابت زمنى L/R والناتج السابق هو حل للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى (8) والتى تم الحصول عليها باستخدام KVL حول الحلقة والحل كما يلى :



شكل 7–7

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 \quad \text{for } t > 0, \qquad i(0^+) = 0 \qquad (8)$$

بما أن $i = i_h(t) + i_p(t)$ ، حيث $i_h(t)\ Ae^{-Rt/L}$ ، $i_p(t) = V_0/R$ لذا :

$$i = Ae^{-Rt/L} + V_0/R$$

المعامل A يوجد من العلاقة $i(0^+) = A + V_0/R = 0$ أو $A = -V_0/R$. ويكون التيـار فى الملف والجهد على طرفيه كما هو مبين فى المعادلة (9) والمعادلة (10) وكما هو مرسوم فى شكل 7-7(b) ، (c) على التوالى .

$$i(t) = V_0/R(1 - e^{-Rt/L}) \qquad \text{for } t > 0 \qquad (9)$$

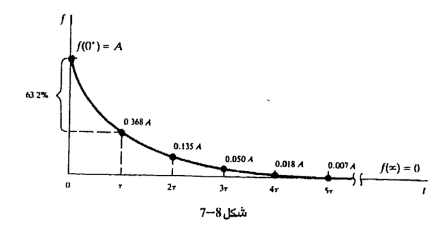
$$v(t) = L\frac{di}{dt} = V_0 e^{-Rt/L} \qquad \text{for } t > 0 \qquad (10)$$

7-6 الدالة الأسية المسترجعة

يمكن كتابة الدالة الأسية المتناقصة بالشكل $e^{-t/\tau}$ حيث τ هو ثابت الزمن بالثوانى ولدائرة RC المبينة بند 7-2 $\tau = RC$ بينما لدائرة RL فى بند 7-4 $\tau = L/R$ والدالة المتناقصة بشكل عام هى :

$$f(t) = Ae^{-t/\tau} \qquad (t > 0)$$

وهى مرسومة فى شكل 7-8 بأزمنة مضاعفات τ ومنها :



شكل 7-8

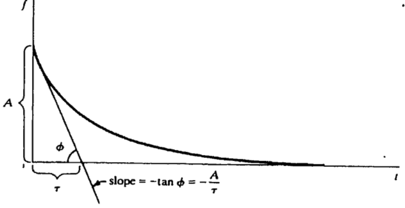
$$f(\tau) = Ae^{-1} = 0.368A$$

أى أنه عند $t = \tau$ فإن الدالة تكون 36.8% من قيمتها الابتدائية . ويمكن القول أيضاً أن الدالة قد استنفذت 63.2% من تغيرها من $f(0^+)$ إلى $f(\infty)$. وعند $t = 5\tau$ فإن الدالة يكون لها القيمة 0.0067A والتى تعتبر أقل من 1% من القيمة الابتدائية . وعملياً فإن الجزء العابر يعتبر منتهياً بعد $t = 5\tau$.

والمماس للمنحنى الأسى عند $t = 0^+$ يمكن استخدامه لتقدير ثابت الزمن . فى الحقيقة حيث أن

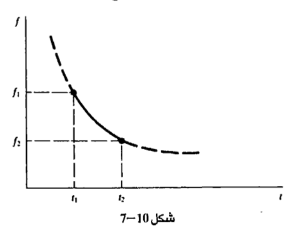
$$\text{slope} = f'(0^+) = -\frac{A}{\tau}$$

فإن المماس يجب أن يقطع المحور الأفقى عند $t = \tau$ (انظر شكل 9-7) وعموماً فإن المماس عند $t = t_0$ يتقاطع مع المحور الأفقى عند $t_0 + \tau$. وإذا كانت القيمتان $f(t_0)$ ، $f'(t_0)$ معلومتين فإنه يمكن رسم المنحنى بالكامل .



شكل 9—7

وعندما يمكن تخطيط المنحنى على ورقة مربعات أو على شاشة أوسلسكوب وتكون القيم المتعاقبة للدالة والميل غير متوفرة ففى هذه الحالة أى زوج من بيانات النقاط المقروءة من الأجهزة يمكن استخدامها لإيجاد معادلة المنحنى العابر وبالتالى بالرجوع إلى شكل 10-7 .



شكل 10—7

$$f_1 = Ae^{-t_1/\tau} \qquad f_2 = Ae^{-t_2/\tau}$$

والتى يمكن حلها أيضاً لتعطى :

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln f_1 - \ln f_2}$$

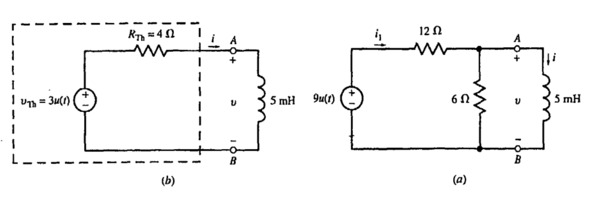
ومن ثم يمكن الحصول على A بدلالة τ وكلا من f_1 أو f_2 .

7-7 ودوائر RL و RC المعقدة ذات الرتبة الأولى

يمكن حل الدوائر الأكثر تعقيداً والمحتوية على مقاومات منابع وعناصر تخزين الطاقة باستخدام مكافئ ثفنين أو نورتون كما يبدو على طرفى ملف أو مكثف . وهذا يبسط الدائرة المعقدة إلى دائرة RC أو RL بسيطة والتى يمكن حلها بالطرق المشروحة سابقاً .

إذا تم توصيل منبع تيار مستمر فى دائرة فجأة فإن التيارات والجهود الناتجة ستكون أسية ولها نفس ثابت الزمن وربما بقيم ابتدائية ونهائية مختلفة . وثابت الزمن إما أن يكون RC أو L/R حيث R هى المقاومة فى مكافئ ثفنين للدائرة بالنسبة لطرفى المكثف أو الملف .

مثـــال 7-5 : أوجد i ، v ، i_1 فى شكل 7-11(a) :



شكل 7-11

مكافئ ثفين للدائرة التى على يسار الملف المبينة بشكل 7-11(b) مع القيم $R_{Th} = 4\Omega$ ، $\upsilon_{Th} = 3u(t)$ (V) . وثابت الزمن للدائرة هو $\tau = L/R_{Th} = 5(10^{-3}) / 4$ s = 1.25 s والقيمة الابتدائية لتيار الملف يكون صفراً والقيم النهائية هى :

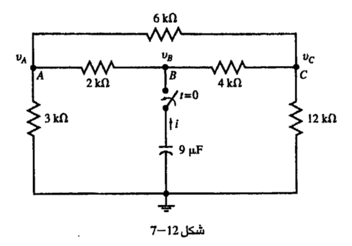
$$i(\infty) = \frac{\upsilon_{Th}}{R_{Th}} = \frac{3\text{ V}}{4\,\Omega} = 0.75\text{ A}$$

وبذلك

$$i = 0.75(1 - e^{-800t})u(t) \quad (A) \qquad \upsilon = L\frac{di}{dt} = 3e^{-800t}u(t) \quad (V) \qquad i_1 = \frac{9-\upsilon}{12} = \frac{1}{4}(3 - e^{-800t})u(t)\ (A)$$

يمكن إيجاد قيمة υ أيضاً مباشرة من قيمتها الابتدائية $\upsilon(0^+) = (9 \times 6) / (12 + 6) = 3V$ ومن قيمتها النهائية $\upsilon(\infty) = 0$ وأيضاً الثابت الزمنى للدائرة .

مثـــال 7-6 : وصل مكثف 9-µF كما فى شكل 7-12 للدائرة عند الزمن t = 0 وفى هذا الوقت كان جهد المكثف $V_0 = 17$ V . أوجد υ_A ، υ_B ، υ_C ، i_{AB} ، i_{BC} لقيم t > 0 .



شكل 7-12

استخدم KCL عند العقد A ، B ، C للزمن t > 0 لإيجاد الجهود بدلالة التيار i .

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\upsilon_A - \frac{1}{2}\upsilon_B - \frac{1}{6}\upsilon_C = 0 \quad \text{or} \quad 6\upsilon_A - 3\upsilon_B - \upsilon_C = 0 \qquad (11)$$ العقدة A :

$$-\frac{1}{2}\upsilon_A + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\upsilon_B - 10^3 i - \frac{1}{4}\upsilon_C = 0 \quad \text{or} \quad -2\upsilon_A + 3\upsilon_B - \upsilon_C = (4\times 10^3)i \qquad (12)$$ العقدة B :

$$-\frac{1}{6}\upsilon_A - \frac{1}{4}\upsilon_B + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)\upsilon_C = 0 \quad \text{or} \quad -2\upsilon_A - 3\upsilon_B + 6\upsilon_C = 0 \qquad (13)$$ العقدة C :

بحل المعادلات (11)، (12)، (13) أيضاً نحصل على :

$$v_A = \tfrac{7}{3}(10^3)i \qquad v_B = \tfrac{34}{9}(10^3)i \qquad v_C = \tfrac{8}{3}(10^3)i$$

والدائرة من ناحية المكثف مكافئة لمقاومة $R = v_B/i = 34/9\ k\Omega$ ويقوم المكثف بتفريغ جهده الابتدائى V_0 بشكل أسى ذو ثابت زمنى $\tau = RC = (34/9)\ (10^3)\ (9 \times 10^{-6}) = 0.034\ s$ لقيم $t > 0$ وتكون الجهود والتيارات كالتالى :

$$v_B = V_0 e^{-t/\tau} = 17e^{-1000t/34} \quad (V)$$

$$i = -C\frac{dv_B}{dt} = (9 \times 17 \times 10^{-3}/34)e^{-1000t/34} = (4.5 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} \quad (A)$$

$$v_A = \tfrac{7}{3}(10^3)i = 10.5e^{-1000t/34} \quad (V) \qquad v_C = \tfrac{8}{3}(10^3)i = 12e^{-1000t/34} \quad (V)$$

$$v_{AB} = v_A - v_B = -6.5e^{-1000t/34} \quad (V) \qquad i_{AB} = v_{AB}/2000 = (-3.25 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} \quad (A)$$

$$v_{AC} = v_A - v_C = -1.5e^{-1000t/34} \quad (V) \qquad i_{AC} = v_{AC}/6000 = (-0.25 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} \quad (A)$$

$$v_{BC} = v_B - v_C = 5e^{-1000t/34} \quad (V) \qquad i_{BC} = v_{BC}/4000 = (1.25 \times 10^{-3})e^{-1000t/34} \quad (A)$$

جميع الجهود والتيارات دوال أسية لها نفس الثابت الزمنى وللتبسيط تستخدم عادة الوحدات V، mA، kΩ، ms لكل من الجهود والتيار والمقاومة والزمن على التوالى حتى يمكن حذف المضروب 1000 ، 10^{-3} من المعادلة كما هو موضح باختصار فيما يلى :

$$v_A = 10.5e^{-t/34} \quad (V) \qquad v_{AB} = -6.5e^{-t/34} \quad (V) \qquad i_{AB} = -3.25e^{-t/34} \quad (mA)$$

$$v_B = 17e^{-t/34} \quad (V) \qquad v_{AC} = -1.5e^{-t/34} \quad (V) \qquad i_{AC} = -0.25e^{-t/34} \quad (mA)$$

$$v_C = 12e^{-t/34} \quad (V) \qquad v_{BC} = 5e^{-t/34} \quad (V) \qquad i_{BC} = 1.25e^{-t/34} \quad (mA)$$

$$i = 4.5e^{-t/34} \quad (mA)$$

7-8 حالات الاستقرار لدوائر التيار المستمر مع الملفات والمكثفات

كما ذكر فى بند 1-7 فإن المركبة المعتادة الأسية لاستجابة دوائر RL ، RC للدخول السُلمية يتلاشى مع الزمن . عند الزمن $t = \infty$ تصل الدائرة إلى حالتها المستقرة وتكون الاستجابة ناتجة من مركبة التيار المستمر فقط .

ونظرياً فإن دوائر RL ، RC تصل إلى حالة الاستقرار للتيار المستمر فيما لا نهاية من الزمن . مع هذا فإنه عند $t = 5\ \tau$ فإن المركبة العابرة تصل إلى 0.67% من قيمتها الابتدائية وبعد مرور عشر أمثال من ثابت الزمن فإن المركبة العابرة تساوى 0.0045% من قيمتها الابتدائية وهى أقل من 5×10^{-6} حيث عند هذا الزمن يمكن اعتبار الوصول إلى الحالة المستقرة فى جميع التطبيقات العملية .

فى دوائر RLC للتيار المستمر المستقرة وباعتبار أنه لا يوجد تذبذبات مستمرة فى الدائرة فإن جميع التيارات والجهود فى الدائرة تكون ثابتة . وحينما يكون الجهد على طرفى المكثف ثابتاً فإن التيار المار خلاله يكون صفراً . وبذلك تبدو جميع المكثفات فى حالات التيار المستمر كما لو كانت دوائر مفتوحة . وبالمثل حينما يكون التيار فى الملف ثابتاً فإن الجهد على طرفيه يكون صفراً وبذلك تعتبر جميع الملفات كدائرة قصيرة فى حالات التيار المستمر المستقر . وتتحول الدائرة فى هذه الحالة كما لو كانت دائرة ذو مقاومة مادية التيار المستمر والتى منها يمكن إيجاد الجهود على المكثفات والتيارات المارة فى الملفات حيث أن جميع التيارات والجهود تكون ثابتة ولا يتطلب ذلك أى معادلات تفاضلية .

وحالة التيار المستمر المستقرة المذكورة سابقاً صحيحة للدوائر المحتوية أى عدد من الملفات والمكثفات ومنابع التيار المستمر .

مثـــال 7-7 : أوجد قيم الحالة المستقرة لكل من i_L ، υ_{C1} ، υ_{C2} فى الدائرة المبينة شكل 7-13(a) .

حينما نصل إلى حالة استقرار ستكون الدائرة كما هو مبين فى شكل 7-13(b) ويمكن الحصول على تيار الملف وجهود المكثف بتطبيق KCL عند العقدتين A ، B فى شكل 7-13(b) .

العقدة A : $$\frac{\upsilon_A}{3} + \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{6} + \frac{\upsilon_A + 18 - \upsilon_B}{6} = 3 \qquad \text{or} \qquad 2\upsilon_A - \upsilon_B = 0$$

العقدة B : $$\frac{\upsilon_B}{12} + \frac{\upsilon_B - \upsilon_A}{6} + \frac{\upsilon_B - 18 - \upsilon_A}{6} = 0 \qquad \text{or} \qquad -4\upsilon_A + 5\upsilon_B = 36$$

وبالحل لإيجاد υ_A ، υ_B ، نجد أن $\upsilon_A = 6$ V ، $\upsilon_B = 12$ V وباستخدام شكل 7-13(b) نحصل على $i_L = 2$ mA ، $\upsilon_{C1} = 8$ V ، $\upsilon_{C2} = 6$ V .

مثـــال 8-7 : أوجد i ، υ للدائرة المبينة شكل 7-14 .

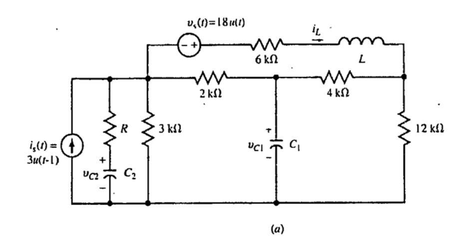
عند $t = 0$ فإن الجهد على طرفى المكثف يكون صفراً ويكون قيمته النهائية بتحليل التيار المستمر -2V وثابت الزمن للدائرة شكل 7-14 كما هو مستنتج فى مثال 7-6 هو 0.034 s لذلك :

$$\upsilon = -2(1 - e^{-1000t/34})u(t) \quad \text{(V)}$$

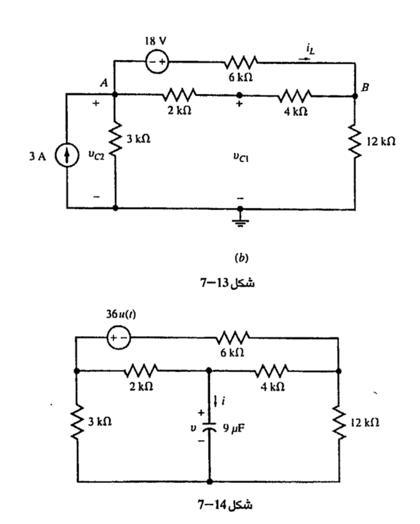
$$i = C\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{(9 \times 10^{-6})(2 \times 10^{3})}{34}e^{-1000t/34}u(t) \quad \text{(A)} = -0.53e^{-1000t/34}u(t) \quad \text{(mA)}$$

7-9 الحالات الإنتقالية عند حدوث الفصل والتوصيل

يتسبب فصل أو توصيل المنبع فجأة وكذلك التغيير المفاجئ فى قيمته فى تغيير مفاجئ للجهود والتيارات فى الدائرة. ويحتاج التغيير المفاجئ فى الجهد على المكثف إلى تيار دفعى وكذلك التغيير المفاجئ فى تيار الملف يتطلب دفعة فى الجهد. وإذا لم توجد هذه الدفعات فإن جهود المكثف وتيارات الملف تظل مستمرة. لذلك فإن حالات L ، C بعد عملية الفصل أو التوصيل يمكن استنتاجها من حالاتها قبل الفصل أو التوصيل .



(a)



شكل 7-13

شكل 7-14

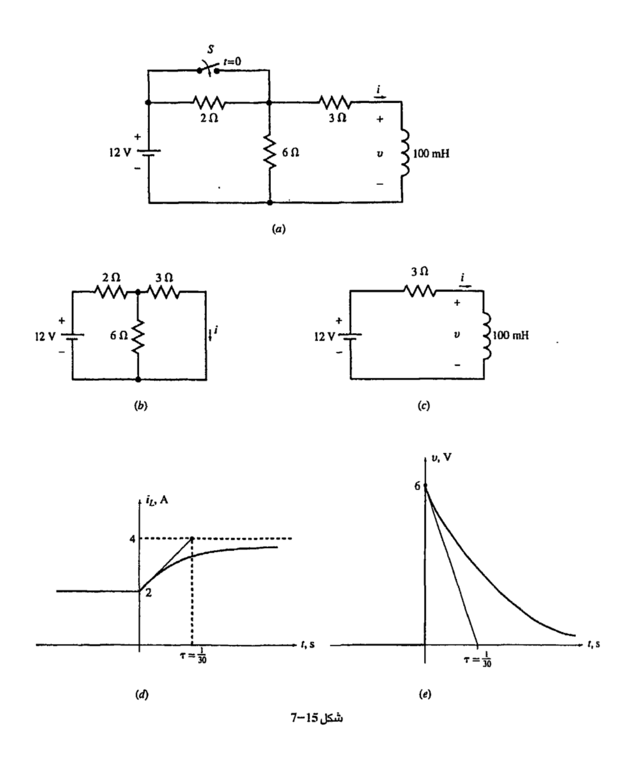
مثـــــال 7-9 : إقفل المفتاح S عند الزمن $t = 0$. أوجد i ، υ لجمع الأزمنة لشكل 7-15(a) .

عند $t = 0^-$ تكون الدائرة فى حالة استقرار ويكون الملف كدائرة قصر بجهد $\upsilon(0^-) = 0$ [انظر شكل 7-15(b)] . وبذلك يسهل الحصول على تيار الملف وهو $i(0^-) = 2$ A وبعد قفل S عند $t = 0$ فإن الدائرة ستكون كما فى شكل 7-15(c) . وعند $t > 0$ يكون التيار أسياً بثابت زمنى $\tau = L/R = 1/30$ s وقيمة ابتدائية $i(0^+) = i(0^-) = 2$ A وقيمة نهائية $12/3 = 4$ A - ويكون جهد وتيار الملف .

عند $t < 0$ $\qquad i = 2\text{ A and } v = 0$

عند $t < 0$ $\qquad i = 4 - 2e^{-30t}\text{ (A) and } v = L\dfrac{di}{dt} = 6e^{-30t}\text{ (V)}$

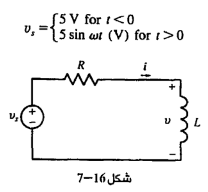
وذلك موضح بشكل (d, e) 7-15



شكل 7-15

مثـــال 7-10 : أوجـــد i ، υ لقـيم $t = 0^+$ ، فـي الدائـرة المبينة شـكل 7-16 إذا كـان $R = 5\Omega$ ، $L = 10\ mH$.

$$v_s = \begin{cases} 5\text{ V for } t<0 \\ 5\sin\omega t \text{ (V) for } t>0 \end{cases}$$



شكل 7–16

عند $t = 0^-$ ، $i(0^-) = 5/5 = 1A$ ، $\upsilon(0^-) = 0$ أثناء الزمن الانتقالى من $t = 0^-$ إلى $t = 0^+$ يكون تيار الملف مستمراً حيث لا يوجد جهد دفعى لإحداث الانقطاع له . وبذلك فإن $i(0^+) = i(0^-) = 1A$ ولإيجاد $\upsilon(0^+)$ أكتب KVL عند $t = 0^+$ ومنها $\upsilon_s = RI + \upsilon$ لاحظ أن $\upsilon_s(0^+) = 0$ لذلك فإن $\upsilon(0^+) = \upsilon_s(0^+) - Ri(0^+) = -5\text{ V}$.

7-10 استجابة دوائر الرتبة الأولى مع النبضة

فى هذا الباب سنستنتج استجابة دوائر الرتبة الأولى مع النبضة المستطيلة ويطبق الاستنتاج لدوائر RC ، RL حيث يكون الدخل إما تياراً أو جهداً . وسنستخدم كمثال دائرة التوالى RC المبينة شكل 7-17(a) إذا كان منبع الجهد يعطى نبضة زمن بقائها T وارتفاعها V_0 . لقيم $t < 0$ يكون من υ ، i صفراً . أما أثناء وجود النبضة نستخدم (6b) ، (6C) فى بند 7-3 .

$$v = V_0(1 - e^{-t/RC}) \qquad (0<t<T) \qquad (14a)$$

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \qquad (0<t<T) \qquad (14b)$$

وحينما تتوقف النبضة فإن الدائرة تكون بدون منبع مع المكثف ذو الجهد الابتدائى V_T .

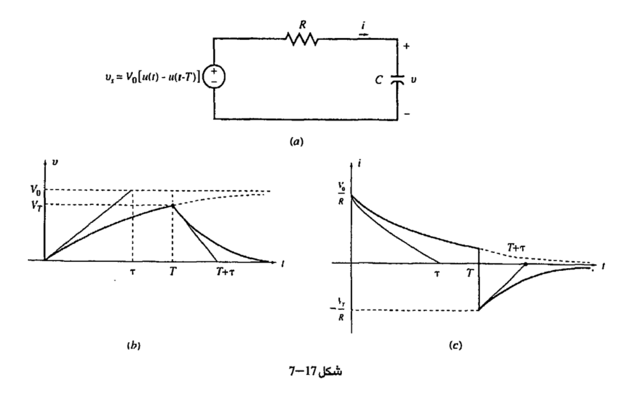
$$V_T = V_0(1 - e^{-T/RC}) \qquad (14c)$$

باستخدام (3) ، (4) فى بند 7-2 وأخذاً فى الاعتبار إزاحة الزمن T نحصل على :

$$v = V_T e^{-(t-T)/RC} \qquad (t>T) \qquad (15a)$$

$$i = -(V_T/R)e^{-(t-T)/RC} \qquad (t>T) \qquad (15b)$$

ورسم كلا من تغير جهد المكثف والتيار فى شكل (b)7-17، (c).



شكل 17—7

مثـــال 11-7 : فى الدائرة المبينة شكل 7-17(a) إذا كان $R = 1\ k\Omega$، $C = 1\ \mu F$ وباعتبار جهد المنبع نبضه بارتفاع V_0 وزمن T. أوجد i، v عند (أ) $V_0 = 1$ V/V و $T = 1$ ms، (ب) $V_0 = 10$ V، $T = 0.1$ ms، (جـ) $V_0 = 100$ V، $T = 0.01$ ms.

نستخدم المعادلة 14، 15 بثابت الزمن $\tau = RC = 1$ ms وللتذكرة فإننا سنعبر عن الزمن بالملى ثانية (ms) والجهد بالفولت (V) والتيار بالملى أمبير (ms) ونستخدم أيضاً القيمة الأسية $e^{-t} = 1-t$ حيث $t << 1$.

(أ) لقيم $V_0 = 1$ V، $T = 1$ ms، فى الفترة $0 < t < 1$ ms

$$v = (1 - e^{-t}),\ i = e^{-t},\ \text{and}\ V_T = (1 - e^{-1}) = 0.632\ \text{V}$$

ولقيم $t > 1$ms

$$v = 0.632e^{-(t-1)} = 1.72e^{-t},\ \text{and}\ i = -1.72e^{-t}$$

(ب) لقيم $V_0 = 10$ V ، $T = 0.1$ ms ، فى الفترة $0 < t < 0.1$ms

$$v = 10(1 - e^{-t}),\ i = 10e^{-t},\ \text{and}\ V_T = 10(1 - e^{-0.1}) = 0.95\ \text{V}$$

لقيم $t > 0.1$ ms

$$v = 0.95e^{-(t-0.1)} = 1.05e^{-t},\ \text{and}\ i = -1.05e^{-t}$$

(جـ) لقيم $V_0 = 100$ V ، $T = 0.01$ ms ، فى الفترة $0 < t < 0.01$ms

$$v = 100(1 - e^{-t}) \approx 100t,\ i = 100e^{-t} \approx 100(1 - t),\ \text{and}\ V_T = 100(1 - e^{-0.01}) = 0.995\ \text{V}$$

لقيم $t > 0.01$

$$v = 0.995e^{-(t-0.01)} = 1.01e^{-t}\ \text{and}\ i = -1.01e^{-t}$$

وحينما تقترب نبضــة الدخل لتكون دفعـة فإن جهد المكثف وتياره يقتربان من $v = e^{-t}\mu(t)$ V ، $i = \delta(t) - e^{-t}\mu(t)$.

7-11 الاستجابة الدفعية لدوائر RC و RL

يمكن تمثيل النبضة الضيقة لتكون دفعة تحدد قوتها المساحة تحت النبضة . والاستجابة الدفعية وسيلة مفيدة فى تحليل ومعرفة تركيب الدوائر . ويمكن الحصول عليها بطرق متعددة . وأخذ النهاية لاستجابة النبضـة الضيقة لتسمى حد التقارب كما فى مثال 11-7 ، 12-7وبأخذ تفاضل الاستجابة السُلمية وبحل المعادلة التفاضلية مباشرة . ويعبر عن التجاوب الدفعى بالرمز $h(t)$.

مثـــــال 7-12 : أوجد حدى كلا من i ، v للدائرة المبينة شكل 7-17(a) لنبضة جهد مساحتها الوحدة إذا قلّت فترة بقاؤها إلى الصفر .

استخدم الاستجابة النبضية فى المعادلة (14) ، (15) باعتبار $V_0 = 1/T$ وأوجد حدود نهايتها حينما T تقترب من الصفر . من المعادلة (14-c) نحصل على :

$$\lim_{T\to 0} V_T = \lim_{T\to 0} (1 - e^{-T/RC})/T = 1/RC$$

من المعادلة رقم 15 نحصل على :

$$\text{For } t<0, \qquad h_v = 0 \quad \text{and} \quad h_i = 0$$

$$\text{For } 0^- < t < 0^+, \qquad 0 \le h_v \le \frac{1}{RC} \quad \text{and} \quad h_i = \frac{1}{R}\delta(t)$$

$$\text{For } t>0, \qquad h_v(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC} \quad \text{and} \quad h_i(t) = -\frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}$$

ولذلك :

$$h_v(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t) \qquad \text{and} \qquad h_i(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}u(t)$$

مثـــال 7-13 : أوجد الاستجابة الدفعية لدائرة RC المبينة شكل 7-17(a). بأخذ تفاضل استجابتها للوحدة السُلمية .

يمكن اعتبار الوحدة الدفعية هى تفاضل الوحدة السُلمية . وباعتبار خواص المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة فإننا يمكن أخذ التفاضل للتجاوب السُلمى بالنسبة للزمن لإيجاد الاستجابة الدفعية . استجابة الوحدة السلمية لدائرة RC وجدت من المعادلة (6) لتكون :

$$v(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t) \qquad \text{and} \qquad i(t) = (1/R)e^{-t/RC}u(t)$$

نوجد استجابة دفعة الوحدة بأخذ تفاضلات الاستجابة السُلمية لذلك :

$$h_v(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t) \qquad \text{and} \qquad h_i(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}u(t)$$

مثـــال 7-14 : أوجد الاستجابة الدفعية $h_i(t)$ ، $h_v(t)$ ، $H_{i1}(t)$ لدائرة RL المبينة فى شكل 7-11(a) بأخذ تفاضلات استجابات الوحدة السلمية .

استجابات الدائرة لنبضة سلمية قيمتها العظمى 9 سبق إيجاها فى مثال 7-5 . وبأخذ تفاضلاتها وتغيير قيمها بالقيمة 1/9 نجد أن استجابات الوحدة الدفعية هى :

$$h_i(t) = \frac{1}{9}\frac{d}{dt}[0.75(1 - e^{-800t})u(t)] = \frac{200}{3}e^{-800t}u(t)$$

$$h_v(t) = \frac{1}{9}\frac{d}{dt}[3e^{-800t}u(t)] = -\frac{800}{3}e^{-800t}u(t) + \frac{1}{3}\delta(t)$$

$$h_{i1}(t) = \frac{1}{9}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4}(3 - e^{-800t})u(t)\right] = \frac{200}{9}e^{-800t}u(t) + \frac{1}{18}\delta(t)$$

7-12 ملخص استجابات النبضة والدفعة فى دوائر RC ، RL

تم تلخيص استجابات دوائر RL ، RC لدخل النبضة أو الدفعة فى جدول 1-7 وبعض هذه القيم فى الجدول تم الحصول عليها فى البنود السابقة والباقى سيتم الحصول عليه فى المسائل المحلولة .

7-13 استجابة دوائر RC ، RL للتغذية الأسية المفاجئة

إذا اعتبرنا المعادلة التفاضلية ذات الدرجة الأولى المستنتجة مركبة RL على التوالى مع منبع جهد أسى مفاجئ $\upsilon_s = V_0 e^{st} u(t)$ كما فى دائرة شكل 18-7 . تكون الدائرة فى حالة سكون عند $t < 0$ وباستخدام KVL نحصل على :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 e^{st} u(t) \qquad (16)$$

جـــدول 7-1 (a)

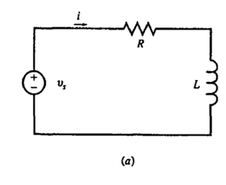
تجاوب النبضة السلمية والدفعة فى دوائر RC

دوائر RC	تجاوب وحدة النبضة	تجاوب وحدة الدفعة
	$\upsilon_s = u(t)$ $\begin{cases} \upsilon = (1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = (1/R)e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$\upsilon_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_\upsilon = (1/RC)e^{-t/RC}u(t) \\ h_i = -(1/R^2C)e^{-t/RC}u(t) + (1/R)\delta(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} \upsilon = R(1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_\upsilon = (1/C)e^{-t/RC}u(t) \\ h_i = -(1/RC)e^{-t/RC}u(t) + \delta(t) \end{cases}$

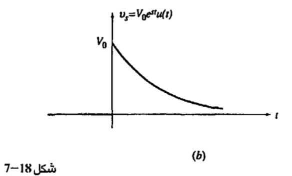
جـــدول (b) 7-1

تجاوب النبضة والدفعة فى دوائر RL

تجاوب وحدة الدفعة	تجاوب وحدة النبضة	دوائر RC
$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (R/L)e^{-Rt/L}u(t) + \delta(t) \\ h_i = (1/L)e^{-Rt/L}u(t) \end{cases}$	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = e^{-Rt/L}u(t) \\ i = (1/R)(1 - e^{-Rt/L})u(t) \end{cases}$	R, i, v_s, L, +, v, −
$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = -(R^2/L)e^{-Rt/L}u(t) + R\delta(t) \\ h_i = (R/L)e^{-Rt/L}u(t) \end{cases}$	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = Re^{-Rt/L}u(t) \\ i = (1 - e^{-Rt/L})u(t) \end{cases}$	i, i_s, R, L, +, v, −



(a)



(b)

شكل 7-18

لقيم $t > 0$ فإن الحل يكون :

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \qquad \text{and} \qquad i(0^+) = 0 \qquad (17a)$$

الاستجابة الطبيعية للدالة $i_h(t)$ هو حل المعادلة $Ri + L\,(di/dt) = 0$ وهى حالة الدالة القسرية الصفرية وباتباع إزاحة مماثلة لما فى بند 7-4 نحصل على :

$$i_h(t) = Ae^{-Rt/L} \qquad (17b)$$

والاستجابة القسرية $i_p(t)$ هى دالة تحقق المعادلة (16) لقيم $t > 0$ والدالة الوحيدة لذلك هى :

$$i_p(t) = I_0 e^{st} \qquad (17c)$$

وبعد التعويض بالقيمة $i = i_h + i_p$ فى المعادلة (16) فإن I_0 تكون $I_0 = V_0 / (R+Ls)$ وباختيار $A = -V_0 / (R/Ls)$ فإن حدود النهاية وهى $i(0^+) = 0$ تكون أيضاً محققة ولذلك :

$$i(t) = \frac{V_0}{R + Ls} (e^{st} - e^{-Rt/L}) u(t) \qquad (17d)$$

حالة خاصة :

إذا كانت الدالة القسرية لها نفس القيمة الأسية كما فى الاستجابة الطبيعية $(s = -R/L)$ فإن الاستجابة القسرية يجب أن تكون $i_p(t) = I_0 e^{-Rt/L}$ ويمكن تحقيق ذلك فى المعادلة (16) والتى تؤول أيضاً $I_0 = V_0/L$. والاستجابة الطبيعية تكون كما فى 17(b) . وبذلك تكون الاستجابة الكلية :

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = (I_0 t + A) e^{-Rt/L}$$

From $i(0^-) = i(0^+) = 0$ we find $A = 0$, and so $i(t) = I_0 t e^{-Lt/R} u(t)$, where $I_0 = V_0/L$.

7-14 استجابة دوائر RC ، RL للتغذية الجيبية المفاجئة

حينما نصل دائرة توالى RL بمنبع تيار متردد $\upsilon_s = V_0 \cos \omega t$ ، فجأة كما فى شكل 19-7 فإن المعادلة المعول عليها تكون :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0(\cos \omega t) u(t) \qquad (18)$$

وبذلك يكون الحل :

$$i(t) = i_h + i_p \qquad \text{where} \qquad i_h(t) = Ae^{-Rt/L} \quad \text{and} \quad i_p(t) = I_0 \cos(\omega t - \theta)$$

وبإدخال i_p فى المعادلة (18) نجد أن I_0.

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \qquad \text{and} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{L\omega}{R}$$

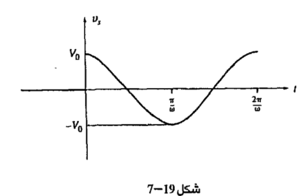


وبذلك

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + I_0 \cos(\omega t - \theta) \qquad t > 0$$

ومن $i(0^+) = 0$ نحصل على $A = -I_0 \cos\theta$ وبذلك :

$$i(t) = I_0[\cos(\omega t - \theta) - \cos\theta(e^{-Rt/L})]$$



شكل 19–7

7-15 ملخص الاستجابة القسرية فى دوائر الرتبة الأولى

باعتبار المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dv}{dt}(t) + av(t) = f(t) \qquad (19)$$

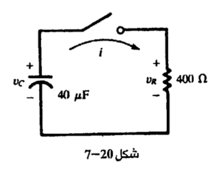
تعتمد الاستجابة القسرية $v_p(t)$ على الدالة القسرية $f(t)$. وقد أعطيت عدة أمثلة فى البنود السابقة. والجدول 2-7 يلخص بعض الازواج المفيدة للدوال القسرية وما هو مقترح لقيم $v_p(t)$. ونحصل على الاستجابات بالتعويض فى المعادلة التفاضلية. ويمكن استنتاج الاستجابات القسرية لدوال جديدة باستخدام التوليفات الخطية الموجودة فى جدول 2-7 وزمن التأخير لها.

جـــدول 7-2

	$f(t)$	$v_p(t)$
	1	$\frac{1}{a}$
n	t	$\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}$
n	$e^{st},\ (s \neq -a)$	$\frac{e^{st}}{s+a}$
	e^{-at}	te^{-at}
n	$\cos \omega t$	$A\cos(\omega t-\theta)$ where $A=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ and $\tan\theta=\frac{\omega}{a}$
n	$e^{-bt}\cos \omega t$	$Ae^{-bt}\cos(\omega t-\theta)$ where $A=\frac{1}{\sqrt{(a-b)^2+\omega^2}}$ and $\tan\theta=\frac{\omega}{a-b}$

مسائل محلولة

7-1 عند $t = 0^-$ ومباشرة قبل قفل المفتاح فى شكل 7-20 كانت $v_C = 100$ V . أوجد القيم العابرة للتيار والشحنة.



شكل 7–20

باستخدام الإشارات المبينة فى الشكل فإن $v_C = v_R$ لقيم $t > 0$ ، $1/RC = 62.5\ s^{-1}$ ، وأيضاً $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 100$ V ولذلك:

$$v_R = v_C = 100e^{-62.5t} \quad (V) \qquad i = \frac{v_R}{R} = 0.25e^{-62.5t} \quad (A) \qquad q = Cv_C = 4000e^{-62.5t} \quad (\mu C)$$

7-2 فى المسألة 7-1 أوجد القدرة والطاقة فى المقاومة وقارن الطاقة المستهلكة فى المقاومة بالطاقة الابتدائية المختزنة فى المكثف.

$$p_R = v_R i = 25e^{-125t} \quad \text{(W)}$$

$$w_R = \int_0^t p_R\,dt = \int_0^t 25e^{-125t}\,dt = 0.20(1 - e^{-125t}) \quad \text{(J)}$$

الطاقة الابتدائية المختزنة:

$$W_0 = \tfrac{1}{2}CV_0^2 = \tfrac{1}{2}(40 \times 10^{-6})(100)^2\ \text{J} = 0.20 = w_R(\infty)$$

أى أن الطاقة الكلية فى المكثف قد استوعبت فى المقاومة حيث تحولت إلى حرارة.

7-3 حالة عابرة ناشئة عن RC مطابقة لما هو فى المسألة 7-1، 7-2 لها قدرة عابرة هى:

$$p_R = 360e^{-t/0.00001} \quad \text{(W)}$$

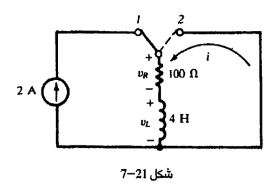
أوجد الشحنة الابتدائية Q_0 إذا كانت $R = 10\ \Omega$.

$$p_R = P_0 e^{-2t/RC} \qquad \text{or} \qquad \frac{2}{RC} = 10^5 \qquad \text{or} \qquad C = 2\ \mu\text{F}$$

$$w_R = \int_0^t p_R\,dt = 3.6(1 - e^{-t/0.00001}) \quad \text{(mJ)}$$

وبذلك $W_R(\infty) = 3.6\ \text{mJ} = Q_0^2/2C$ ومنها $Q_0 = 120\ \mu\text{C}$.

7-4 تغير وضع المفتاح فى دائرة RL المبينة شكل 7-21 من الوضع 1 إلى الوضع 2 عند $t = 0$. أوجد v_R، v_L باستخدام القطبيات المبينة.



شكل 7-21

يغذى منبع التيار الثابت تياراً خلال العنصر الحثى (الملف) فى نفس إتجاه التيار العابر i ومن ثم لقيم $t > 0$.

$$i = I_0 e^{-Rt/L} = 2e^{-25t} \quad \text{(A)}$$
$$v_R = Ri = 200e^{-25t} \quad \text{(V)}$$
$$v_L = -v_R = -200e^{-25t} \quad \text{(V)}$$

7-5 للحالة العابرة فى المسألة 7-4 أوجد P_R ، R_L .

$$p_R = v_R i = 400e^{-50} \quad \text{(W)}$$
$$p_L = v_L i = -400e^{-50t} \quad \text{(W)}$$

يفسر القدرة السالبة للملف بالحقيقة أن الطاقة تخرج من العنصر وحيث أنها تتحول إلى المقاومة فإن P_R تكون موجبة .

7-6 دائـرة التوالـى RC التى بها $R = 5\ k\Omega$ ، $C = 20\ \mu F$متصـلة بمنبـع جهد ثابت 100 V عند الزمن $t = 0$ ولـم يكن هناك شحنة ابتدائية على المكثف . أوجد i ، υ_R ، υ_C ، q عند $t > 0$.

شحنة المكثف وكذلك جهده υ_C يجب أن يكونا مستمرين عند $t = 0$.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$$

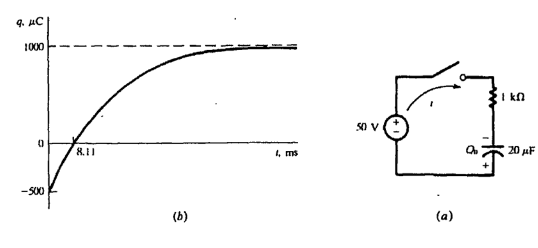
حينما t تؤول إلى ما لا نـهاية ($t \to \infty$) فإن $\upsilon \to 100\ V$ وهو الجهد المسلط ويكون ثابت الزمن للدائرة $\tau = RC = 10^{-1}\ s$ وبذلك من بند 6-10 .

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = -100e^{-10t} + 100 \quad \text{(V)}$$

تستنتج الدوال الأخرى منها من هذه المعادلة فإذا كان V_C ، V_R كلاهما موجب حيث يدخل التيار فإن $\upsilon_R + \upsilon_C = 100\ V$ وبذلك :

$$v_R = 100e^{-10t} \quad \text{(V)}$$
$$i = \frac{v_R}{R} = 20e^{-10t} \quad \text{(mA)}$$
$$q = Cv_C = 2000(1 - e^{-10t}) \quad (\mu C)$$

7-7 أقفل مفتاح فى الدائرة المبينة شكل 7-22(a) عند $t = 0$ وفى نفس اللحظة كانت شحنة المكثف $Q_0 = 500\ \mu C$ بالإشارات المبينة. أوجد i، q لقيم $t > 0$ وارسم منحنى q.



شكل 7-22

الجهد المناظر للشحنة الابتدائية هو $V_0 = Q_0/C = 25$ V حيث تكون $\upsilon_C(0^+) = -25$ V. والإشارة السالبة سببها أن جهد المكثف المتفق مع الإتجاه الموجب للتيار يجب أن يأخذ الإشارة + على اللوح الأعلى. وأيضاً $\upsilon_C(\infty) = +50$ V، $\tau = 0.025$ وبذلك وكما فى المسألة 7-6.

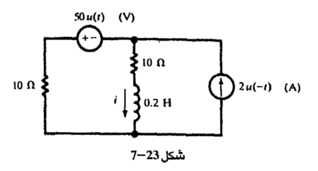
$$\upsilon_C = -75e^{-50t} + 50 \quad (\text{V})$$

ومنها

$$q = C\upsilon_C = -1500e^{-50t} + 1000 \quad (\mu\text{C}) \qquad i = \frac{dq}{dt} = 75e^{-50t} \quad (\text{mA})$$

والرسم فى شكل 7-22(b) يبين أن الشحنة. تتغير من $500\ \mu C$ بقطبية سالبة إلى $1000\ \mu C$ بالقطبية الموجبة.

7-8 أوجد التيار i لجميع قيم t فى الدائرة المبينة شكل 7-23.



شكل 7-23

لقيم $t < 0$ يكون منبع الجهد مقصوراً ويوزع تيار المنبع 2A بالتساوى بين المقاومتين $10\ \Omega$.

$$i(t) = i(0^-) = i(0^+) = 1\ \text{A}$$

لقيم $t > 0$ يستبدل منبع التيار بدائرة مفتوحة ويؤثر المنبع 50 V فى دائرة التوالى RL ($R = 20\ \Omega$) وبالتالى حيث $t \to \infty$ ، $i \to -50/20 = -2.5\ \text{A}$ ومن ثم من بندى 10-6 و 3-7 .

$$i(t) = [(i(0^+) - i(\infty)]e^{-Rt/L} + i(\infty) = 3.5e^{-100t} - 2.5 \quad (\text{A})$$

ومن دوال الوحدة السُلمية يمكن تجميع الصيغتين فى صيغة واحدة تصلح لجميع الأزمنة t .

$$i(t) = 1u(-t) + (3.5e^{-100t} - 2.5)u(t) \quad (\text{A})$$

7-9 فى شكل 7-24(a) اقفل المفتاح عند $t = 0$ ولم يكن للمكثف مشحوناً عند $t < 0$. أوجد i_R ، i_C ، υ_C ، υ_s لجميع الأزمنة إذا كان $i_s = 2\ \text{mA}$.

لقيم $t < 0$: $i_R = 2\ \text{mA}$ ، $i_C = \upsilon_C = 0$ ، $\upsilon_s = (2\ \text{mA})\ (5000\ \Omega) = 10\ \text{V}$.

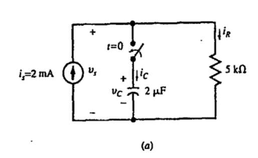
ولقيم $t > 0$ فإن ثابت الزمن يكون $\tau = RC = 10\ \text{ms}$.

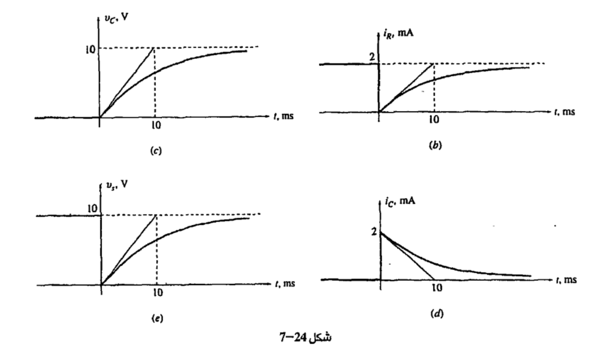
$i_R(0^+) = 0$, $i_R(\infty) = 2\ \text{mA}$, and $i_R = 2(1 - e^{-100t})$ (mA) [See Fig. 7-24(*b*).]

$\upsilon_C(0^+) = 0$, $\upsilon_C(\infty) = (2\ \text{mA})(5\ \text{k}\Omega) = 10\ \text{V}$, and $\upsilon_C = 10(1 - e^{-100t})$ (V) [See Fig. 7-24(*c*).]

$i_C(0^+) = 2\ \text{mA}$, $I_C(\infty) = 0$, and $i_C = 2e^{-100t}$ (mA) [See Fig. 7-24(*d*).]

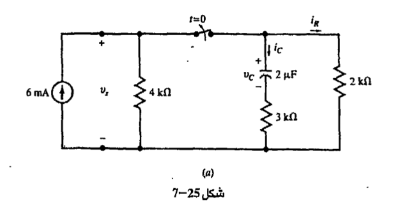
$\upsilon_s(0^+) = 0$, $\upsilon_s(\infty) = (2\ \text{mA})(5\ \text{k}\Omega) = 10\ \text{V}$, and $\upsilon_s = 10(1 - e^{-100t})$ (V) [See Fig. 7-24(*e*).]





شكل 24–7

7-10 فتح المفتاح فى شكل 25-7 عند $t = 0$. أوجد i_R ، i_C ، v_C ، v_s .



(a)

شكل 25–7

لقيـم $t < 0$ تكون الدائـرة فى حالـة اسـتقرار مــع $i_R = 6(4) / (4 + 2) = 4$ mA، $i_c = 0$، $\upsilon_C = \upsilon_s = 4(2) = 8$ V . أثناء لحظة الفصل عند $t = 0$ يبقى جهد المكثف على ما هو عليه وبعد فتح المفتاح عند $t = 0^+$ يكون المكثف بنفس الجهد $\upsilon_C(0^+) = \upsilon_C(0^-) = 8$ V . وعنـد $t > 0$ يقوم المكثف بالتفريغ فى المقاومة $5\ k\Omega$ الناشئة من مقاومـتى التوالى $3\ k\Omega$، $2\ k\Omega$. ويكون ثابت الزمن للدائرة $\tau = (2 + 3)\ (10^3)\ (2 \times 10^{-6}) = 0.01$ s . وتكون التيارات والجهود كما يلى :

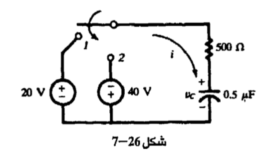
$$\upsilon_C = 8e^{-100t} \quad \text{(V)}$$

$$i_R = -i_C = \upsilon_C/5000 = (8/5000)e^{-100t} = 1.6e^{-100t} \quad \text{(mA)}$$

$$\upsilon_s = (6\ \text{mA})(4\ \text{k}\Omega) = 24\ \text{V}$$

عند $t > 0$ يمر التيار كله 6mA خلال المقاومة $4\ k\Omega$.

7-11 المفتاح فى الدائرة المبينة شكل 26-7 وصل بالوضع 1 عند الزمن $t = 0$ ثم تحرك إلى الوضع 2 بعد مرور ثابت زمنى واحد عند $t = \tau = 250\ \mu s$ أوجد التيار عند $t > 0$.



شكل 26—7

من الأسهل أولاً أن نجـد الشـحنة على المكثف حيث من المعروف أنها مستمرة (عند $t = 0$، عند $t = \tau$) ثم نفاضلها للحصول على التيار .

لقيم $0 \le t \le \tau$ فإن q تأخذ الشكل .

$$q = Ae^{-t/\tau} + B$$

وبفرض أن $q(0) = 0$ ومن الحالة

$$i(0^+) = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{0^+} = \frac{20\text{ V}}{500\ \Omega} = 40\text{ mA}$$

نجد أن $A = -B = -10\ \mu C$

$$q = 10(1 - e^{-4000t}) \quad (\mu C) \qquad (0 \le t \le \tau)$$

من معادلة رقم (20) $q(\tau) = 10(1 - e^{-1})\ \mu C$ ونعلم أن:

$$q(\infty) = (0.5\ \mu F)(-40\text{ V}) = -20\ \mu C.$$

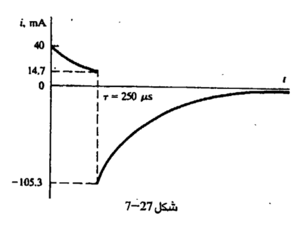
ولذلك فإن q تتحدد لقيم $t \ge \tau$ كالتالى:

$$q = [q(\tau) - q(\infty)]e^{-(t-\tau)/\tau} + q(\infty) = 71.55e^{-4000t} - 20 \quad (\mu C) \tag{21}$$

وبتفاضل (20)، (21) فإن:

$$i = \frac{dq}{dt} = \begin{cases} 40e^{-4000t} & (\text{mA}) \quad (0 < t < \tau) \\ -286.2e^{-4000t} & (\text{mA}) \quad (t > \tau) \end{cases}$$

انظر شكل 7-27



شكل 7–27

7-12 دائرة توالى عليها جهد ثابت V عند $t = 0$. عند أى زمن تكون $v_R = v_L$.

تيار دائرة RL يكون متصلاً مبتدأ فى هذه الحالة من الصفر . ويصل إلى قيمة نهائية V/R . وبذلك عند $t > 0$.

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \text{and} \qquad v_R = Ri = V(1 - e^{-t/\tau})$$

حيث $\tau = L/R$ هو ثابت الزمن للدائرة . وحيث أن $v_R + v_L = V$ فإن الجهدين سيكونان متساويات حينما :

$$v_R = \tfrac{1}{2}V$$

$$V(1 - e^{-t/\tau}) = \tfrac{1}{2}V$$

$$e^{-t/\tau} = \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{t}{\tau} = \ln 2$$

أى أن عند $t = 0.693\,\tau$. لاحظ أن هذا الزمن لا يتوقف على V .

7-13 وصل جهد ثابت لدائرة توالى RL عند $t = 0$ وكان الجهد على الملف 20V عند 3.46 ms، 5 v عند 25 ms . أوجد R إذا كانت $L = 2$ H .

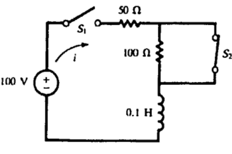
باستخدام طريقة النقطتين التى فى بند 7-6 .

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln v_1 - \ln v_2} = \frac{25 - 3.46}{\ln 20 - \ln 5} = 15.54 \text{ ms}$$

وكذلك

$$R = \frac{L}{\tau} = \frac{2}{15.54 \times 10^{-3}} = 128.7\ \Omega$$

7-14 أقفل المفتاح S_1 عند الزمن $t = 0$ وفتح المفتاح S_2 عند الزمن $t = 4$ ms أوجد i لقيم $t > 0$. فى شكل 7-28.



شكل 28–7

حيث أنه يوجد حث فى الدائرة بصفة دائمة فإن التيار يكون دالة مستمرة فى جميع الأوقات .
وفى الفترة $0 \le t \le 4$ ms أثناء قصر المقاومة 100 Ω ومع ثابت زمنى $\tau = (0.1\ H) / (50\ \Omega) = 2$ ms
فإن i يبدأ من الصفر ويزداد إلى القيمة .

$$\frac{100\ V}{50\ \Omega} = 2\ A$$

ومع هذا فإنه لا يصل إليها بالضبط . ولذلك كما فى المسألة 12-7 .

$$i = 2(1 - e^{-t/2}) \quad (A) \qquad (0 \le t \le 4) \tag{22}$$

وعند قياس t بالمللى ثانية فإن :

$$i(4) = 2(1 - e^{-2}) = 1.729\ A$$

فى الفترة $t \ge 4$ ms فإن i يبدأ عند القيمة 1.729 A ويتناقص نحو القيمة 100/150 = 0.007 A
بثابت زمنى 0.1/150 = 2/3 ms وبذلك مرة أخرى مع t مقاسة بالملى ثانية فإن :

$$i = (1.729 - 0.667)e^{-(t-4)/(2/3)} + 0.667 = 428.4e^{-3t/2} + 0.667 \quad (A) \qquad (t \ge 4) \tag{23}$$

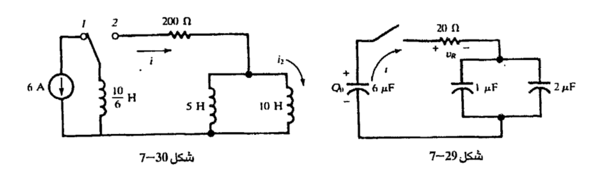
7-15 اقفل المفتاح عند $t = 0$ فى الدائرة شكل 29-7 حينما كان المكثف 6 μF عليه الشحنة $Q_0 = 300$ μC أوجد تعبيراً للجهد العابر v_R .

المكثف المكافىء 3 μF يقوم مقام مكثفى التوازى وبذلك يكون هذا المكثف على التوالى مع المكثف 6 μF حيث تكون السعة الكلية المكافئة 2 μF وبذلك $\tau = RC_{eq} = 40$ μs .

عند $t = 0^+$ فإن KVL تعطى $\upsilon_R = 300/6 = 50$ V ، وحيث أن $t \to \infty$ ، حيث $\upsilon_R \to 0$.
وبذلك :

$$\upsilon_R = 50\, e^{-t/\tau} = 50 e^{-t/40} \quad (\text{V})$$

حيث t تقاس بالكيلوثانية (μs) .



شكل 30–7 شكل 29–7

16-7 فى شكل 30-7 تحرك المفتاح إلى الوضع 2 عند $t = 0$. أوجد التيار i_s عند $t = 34.7$ ms .

بعد حركة المفتاح يكون الحث المكافىء للثلاث ملفات هو :

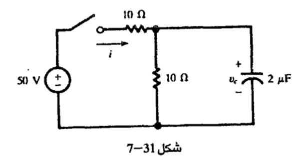
$$L_{eq} = \frac{10}{6} + \frac{5(10)}{15} = 5 \text{ H}$$

وبذلك $\tau = 5/200 = 25$ ms ، وكذلك عند قياس t بالملى ثانية فإن :

$$i = 6e^{-t/25} \quad (\text{A}) \qquad i_2 = \left(\frac{5}{15}\right) i = 2e^{-t/25} \quad (\text{A})$$

and
$$i_2(34.7) = 2e^{-34.7/25} \text{ A} = 0.50 \text{ A}$$

17-7 اقفل المفتاح فى شكل 31-7 عند $t = 0$. أوجد التيار i وجهد المكثف υ_C عند $t > 0$.



شكل 31–7

باعتبار الاستجابة الطبيعية للدائرة . فإن المقاومتين يكونان على التوازى ولذلك :

$$\tau = R_{eq}C = (5\ \Omega)(2\ \mu F) = 10\ \mu s$$

ومع مرور الوقت $\upsilon_C(0^+) = \upsilon_C(0^-) = 0$. وعندما $t \to \infty$ فإن المكثف يصبح دائرة مفتوحة تاركاً المقاومة $20\ \Omega$ مع المنبع $50\ V$ على التوالى . أى أن :

$$i(\infty) = \frac{50}{20} = 2.5\ A \qquad \upsilon_C(\infty) = (2.5\ A)(10\ \Omega) = 25\ V$$

وبمعرفة الحالات النهائية للجهد υ_C فيمكن كتابة :

$$\upsilon_C = [\upsilon_C(0^+) - \upsilon_C(\infty)]e^{-t/\tau} + \upsilon_C(\infty) = 25(1 - e^{-t/10}) \quad (V)$$

حيث يكون الزمن بالميكروثانية .

ويعطى التيار فى المكثف بما يلى :

$$i_C = C\frac{d\upsilon_C}{dt} = 5e^{-t/10} \quad (A)$$

والتيار فى مقاومتى التوازى

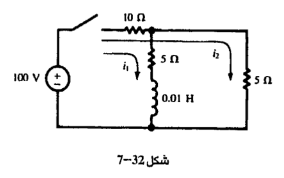
$$i_{10\Omega} = \frac{\upsilon_C}{10\ \Omega} = 2.5(1 - e^{-t/10}) \quad (A)$$

ولذلك

$$i = i_C + i_{10\Omega} = 2.5(1 + e^{-t/10}) \quad (A)$$

ويمكن أيضاً حل المسألة بتحديد تيارات الشبيكات وحل المعادلات التفاضلية الآنية .

7-18 أقفل المفتاح عند $t = 0$ فى الدائرة ذات الشبيكتين المبينة شكل 7-32 . أوجد التيارين i_1 ، i_2 لقيم $t > 0$.



شكل 7–32

$$10(i_1 + i_2) + 5i_1 + 0.01\frac{di_1}{dt} = 100 \tag{24}$$

$$10(i_1 + i_2) + 5i_2 = 100 \tag{25}$$

من المعادلة (25) $i_2 = (100 - 10\,i_1) / 15$ وبالتعويض فى (24)،

$$\frac{di_1}{dt} + 833i_1 = 3333 \tag{26}$$

والحل للحالة المستقرة (الحل الخاص) للمعادلة (26) هو $i_1(\infty) = 3333/833 = 4.0$ A .

$$i_1 = Ae^{-833t} + 4.0 \quad \text{(A)}$$

وبتطبيق شروط الحالة الابتدائية $i_1(0^-) = i_2(0^+) = 0$ نحصل حالياً $A = -4.0$ A لذلك

$$i_1 = 4.0(1 - e^{-833t}) \quad \text{(A)} \qquad \text{and} \qquad i_2 = 4.0 + 2.67e^{-833t} \quad \text{(A)}$$

طريقة أخرى:

عند رؤية باقى الدائرة من طرفى الملف تكون المقاومة المكافئة.

$$R_{eq} = 5 + \frac{5(10)}{15} = 8.33\ \Omega$$

ولذلك $1/\tau = R_{eq}/L = 833\ s^{-1}$. عند $t = \infty$ تكون مقاومة الدائرة:

$$R_T = 10 + \frac{5(5)}{10} = 12.5\ \Omega$$

وبذلك يكون التيار الكلى $i_T = 100/12.5 = 8$ A . عند $t = \infty$ فإن التيار ينقسم بالتساوى بين المقاومتين $5\ \Omega$ مؤدياً إلى تيار نهائى فى الملف قيمته 4A وبالتالى:

$$i_L = i_1 = 4(1 - e^{-833t}) \quad \text{(A)}$$

7-19 دائرة RL توالى بها $R = 50\ \Omega$، $L = 0.2$ H متصلة بمنبع جيبى

$$v = 150 \sin(500t + 0.785) \quad \text{(V)}$$

تم توصيله عند $t = 0$. أوجد التيار لقيم $t > 0$.

معادلة الدائرة لقيم $t > 0$ هى :

$$\frac{di}{dt} + 250i = 750 \sin (500t + 0.785) \qquad (27)$$

وينقسم الحل إلى جزئين الدالة المكملة (i_C) والحل الخاص (i_p) وبذلك $i = i_C + i_p$. والدالة المكملة هى الحل العام للمعادلة (27) حينما يكون الطرف الأيمن صفراً وبذلك $i_C = ke^{-250t}$. وبافتراض ثوابت لتكملة حل i_p نفترض أن :

$$i_p = A \cos 500t + B \sin 500t$$

وحيث أن الطرف الأيمن للمعادلة (27) يمكن أيضاً التعبير عنه بمجموعة خطية من هاتين الدالتين لذلك :

$$\frac{di_p}{dt} = -500A \sin 500t + 500B \cos 500t$$

وبالتعويض لكل من i_p ، di_p/dt فى المعادلة (27) وفك الطرف الأيمن فإن :

$$-500A \sin 500t + 500B \cos 500t + 250A \cos 500t + 250B \sin 500t = 530.3 \cos 500t + 530.3 \sin 500t$$

وبمساوات معاملات الحدود المتشابهة فإن :

$$-500A + 250B = 530.3 \qquad \text{and} \qquad 500B + 250A = 530.3$$

وعند حل هذه المعادلات الآنية فإن $A = -0.4243$ A ، $B = 1.274$ A .

$$i_p = -0.4243 \cos 500t + 1.273 \sin 500t = 1.342 \sin (500t - 0.322) \quad \text{(A)}$$

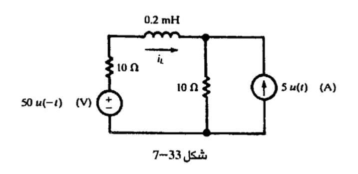
and

$$i = i_c + i_p = ke^{-250t} + 1.342 \sin (500t - 0.322) \quad \text{(A)}$$

عند $t = 0$ ، $i = 0$. وبتطبيق هذه الحالة لقيمة $k = 0.425$ A فإنه فى النهاية نحصل على

$$i = 0.425e^{-250t} + 1.342 \sin (500t - 0.322) \quad \text{(A)}$$

7-20 : أوجد التيار i_L للدائرة المبينة شكل 7-33 لجميع الأزمنة t .



شكل 33–7

لقيم t < 0 فإن المنبع 50 V ينشأ عنه تيار فى الملف قيمته 50/20 = 2.5 A . وأيضاً فإن منبع التيار يستخدم لقيم t > 0 . وحينما ∞ <-- t فإن هذا التيار ينقسم بالتساوى بين المقاومتين 10 Ω ولذلك $i_L(\infty) = -2.5$ A ويكون ثابت الزمن للدائرة .

$$\tau = \frac{0.2 \times 10^{-3}\,\text{H}}{20\,\Omega} = \frac{1}{100}\,\text{ms}$$

وذلك باعتبار t بالملى ثانية وباستخدام $i_L(0+) = i_L(0^-) = 2.5$ A .

$$i_L = [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} + i_L(\infty) = 5.0e^{-100t} - 2.5 \quad \text{(A)}$$

وأخيراً باستخدام دالة الوحدة السلمية لتجميع العلاقات لقيم t < 0 ، t > 0 فإن :

$$i_L = 2.5\,u(-t) + (5.0e^{-100t} - 2.5)u(t) \quad \text{(A)}$$

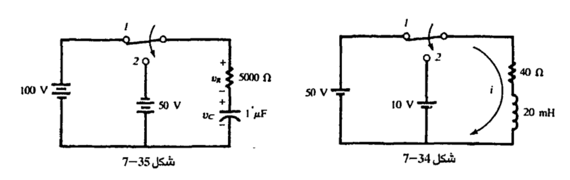
7-21 إذا كان المفتاح للدائرة شكل 34-7 فى الوضع 1 لمدة طويلة ثم تحرك للوضع 2 عند t = 0 . فأوجد العلاقة للتيار i لقيم t > 0 . عند الوضع i .

المفتاح $i(0^-) = 50/40 = 1.25$ A . ومع وجود الملف فى الدارئرة فإن $i(0^+) = i(0^-)$ وبعد فترة طويلة عندما يتحرك المفتاح للوضع 2 فإن $i(\infty) = 10/40 = 0.25$ A ومما سبق فإن :

$$B = i(\infty) = 0.25\,\text{A} \qquad A = i(0^+) - B = 1.00\,\text{A}$$

ويكون ثابت الزمن $\tau = L/R = (1/2000)$ s . ومن ثم لقيم t > 0 .

$$i = 1.00e^{-2000t} + 0.25 \quad \text{(A)}$$



شكل 7-35

شكل 7-34

7-22 تحرك المفتاح فى الدائرة المبينة شكل 7-35 من الوضع 1 إلى الوضع 2 عند $t = 0$ أوجد v_C ، v_R لقيم $t > 0$.

عندما يكون المفتاح فى الوضع 1 ينشأ عن المنبع 100V أن تكون $v_C(\bar{0}) = 100$ V وباستمرارية الشحنة فإن $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. وفى الوضع 2 مع المنبع 50V ذو القطبية المعكوسة فإن $v_C(\infty) = -50$ V ، ولذلك :

$$B = v_C(\infty) = -50 \text{ V} \qquad A = v_C(o^+) - B = 150 \text{ V}$$

$$\tau = RC = \frac{1}{200} \text{ s}$$

and

$$v_C = 150e^{-200t} - 50 \quad (\text{V})$$

وأخيراً فإن KVL يعطى $v_R + v_C + 50 = 0$ ومنها :

$$v_R = -150e^{-200t} \quad (\text{V})$$

7-23 أوجد دوال الطاقة للدائرة الموجودة فى المسألة 7-22 .

$$w_C = \tfrac{1}{2}Cv_C^2 = 1.25(3e^{-200t} - 1)^2 \quad (\text{mJ})$$

$$w_R = \int_0^t \frac{v_R^2}{R}\, dt = 11.25(1 - e^{-400t}) \quad (\text{mJ})$$

7-24 دائرة توالى RC بها $R = 5$ kΩ ، $C = 20$ μF لها منبعين للجهد على التوالى .

$$v_1 = 25u(-t) \quad (\text{V}) \qquad v_2 = 25u(t - t') \quad (\text{V})$$

أوجد العلاقة الكاملة للجهد على طرفى المكثف وارسم علاقة الجهد إذا كانت `t موجبة .

جهد المكثف مستمر لقيم $t \le 0$ ويظهر على المكثف الجهد υ_1 وقيمته 25 V . ولقيم $0 \le t \le t'$ فإن كلا المنبعين يكون صفراً وبالتالى يتناقص υ_C أسياً من القيمة 25 V إلى الصفر .

$$\upsilon_C = 25e^{-t/RC} = 25e^{-10t} \quad \text{(V)} \qquad (0 \le t \le t')$$

وبحالة خاصة فإن $\upsilon_C(t') = 25e^{-10t'}$(V) .

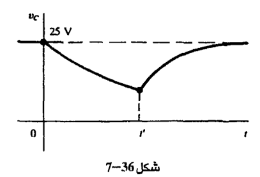
لقيم $t \ge t'$ ، υ_C تزداد من $\upsilon_C(t')$ نحو قيمتها النهائية 25 V المتكونة من υ_2 .

$$\begin{aligned} \upsilon_C &= [\upsilon_C(t') - \upsilon_C(\infty)]e^{-(t-t')/RC} + \upsilon_C(\infty) \\ &= 25[1 - (e^{10t'} - 1)e^{-10t}] \quad \text{(V)} \qquad (t \ge t') \end{aligned}$$

وبذلك لجميع قيم t .

$$\upsilon_C = 25u(-t) + 25e^{-10t}[u(t) - u(t - t')] + 25[1 - (e^{10t'} - 1)e^{-10t}]u(t - t') \quad \text{(V)}$$

انظر شكل 7-36.

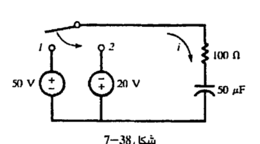


شكل 7–36

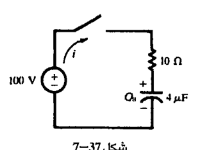
مسائل إضافية

7-25 المكثف فى الدائرة شكل 37-7 له شحنة ابتدائية $Q_0 = 800\ \mu C$ وقطبية كما هو مبين. إذا أقفل المفتاح عند $t = 0$ فأوجد التيار والشحنة لقيم $t > 0$.

الجواب: $i = -10e^{-25000t}$ (A) ، $q = 4 \times 10^{-4} (1 + e^{-25000t})$ (C)



شكل 38-7



شكل 37-7

7-26 وصل مكثف $2\text{-}\mu F$ عليه شحنة ابتدائية $Q_0 = 100\ \mu C$ على طرفى مقاومة $100\ \Omega$ عند $t = 0$ أحسب الزمن الذى ينخفض فيه الجهد العابر على طرفى المقاومة من 40 إلى 10 V.

الجواب 0.277 ms.

7-27 فى دائرة RC المبينة شكل 38-7 أقفل المفتاح عند الوضع 1 عند $t = 0$ ثم تحرك إلى الوضع 2 بعد مرور ثابت زمنى واحد. أوجد التيار العابر عندما (أ) $0 < t < \tau$ ، (ب) $t = \tau$.

الجواب (أ) $0.5e^{-200t}$ ، (ب) $-0.516e^{-200(t-\tau)}$ (A).

7-28 وصل مكثف $10\ \mu F$ له شحنة ابتدائية Q_0 على طرفى مقاومة عند $t = 0$. وإذا علم أن القدرة العابرة للمكثف هى $800e^{-4000t-7}$ (W). أوجد R ، Q_0 والطاقة الابتدائية المختزنة فى المكثف.

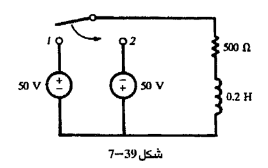
الجواب: $50\ \Omega$ ، $2000\ \mu C$ ، 0.20 J.

7-29 دائرة RL توالى ، $R = 10\ \Omega$ ، $L = 1$ H متصلة بمنبع 100 v عند $t = 0$. أوجد التيار لقيم $t > 0$.

الجواب: $10(1 - e^{-10t})$ A.

7-30 إذا أقفل المفتاح عند الوضع 1 عند $t = 0$ فى شكل 39-7 ثم تحرك إلى الوضع 2 عند $t = 1$ ms. أوجد الزمن الذى يكون عنده الجهد على طرف المقاومة صفراً بعكس القطبية.

الجواب: 1.261 ms.



شكل 39—7

7-31 دائرة توالى RL بها $R = 100\ \Omega$، $L = 0.2$ H وصلت بمنبع 100V عند $t = 0$ ثم وصل منبع آخر 50V له نفس القطبية عند $t = t'$ بدل المنبع الأول . أوجد t' بحيث يكون التيار ثابتاً بالقيمة 0.2 A لقيم $t > t'$. الجواب : 1.39 ms .

7-32 وصل منبع 50 V بقطبيه معكوسة للدائرة فى المسألة 7-31 عند $t = 0.50$ ms بدلاً من المنبع الأول . أوجد التيار لقيم (أ) $0 < t < 0.50$ ms . (ب) $t > 0.50$ ms .

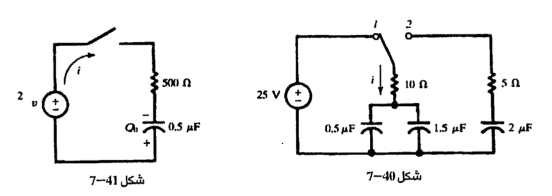
الجواب : (أ) $1\text{-}e^{-500t}$ (A) ، (ب) $0.781e^{-500(t-0.0005)} - 0.50$ (A) .

7-33 جهد عابر $35e^{-500t}$ له القيمة 25 V عند $t_1 = 6.73 \times 10^{-4}$ s . بين أنه عند $t = t_1 + \tau$ فإن الدالة تكون لها القيمة 36.8% من قيمتها عند t_1 .

7-34 قيمة عابرة تزداد من الصفر إلى قيمة مستقرة ثابتة 49.5 عند $t_1 = 5.0$ ms ، 120 عند $t_2 = 20.0$ ms . أوجد ثابت الزمن τ . الجواب : 12.4 ms .

7-35 الدائرة المبينة شكل 7-40 وصلت إلى الوضع 1 عند $t = 0$ ثم الوضع 2 عند $t = 3\ \tau$ أوجد التيار العابر i لقيم (أ) $0 < t < 3\ \tau$ ، (ب) $t > 3\ \tau$.

الجواب : (أ) $2.5e^{-50000t}$ ، (ب) $-1.58e^{-66700(t-0.00006)}$ (A) .



شكل 40—7

شكل 41—7

7-36 دائرة RL بها $R = 300\ \Omega$ ، $L = 1\ H$ متصلة بجهد $\upsilon = 100 \cos (100t + 45°)$ (V) عن طريق قفـل المفتاح عند $t = 0$ يمكن اعتبـار زاويــة وجـه مناســبة للجهــد υ ويمكن بيـانهــا بالقيـمة $100t + (\pi/4)$ (rad) أوجد التيار الناتج عند $t = 0$.

الجواب: $-0.282e^{-300t} + 0.316 \cos (100t + 2.6.6°)$ (A).

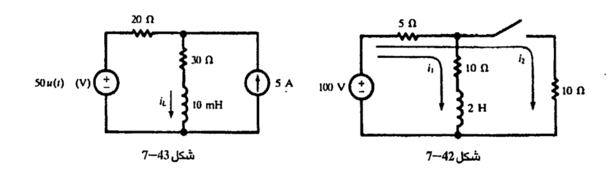
7-37 دائرة RC مبينة شكل 7-41 عليها شحنة ابتدائية $Q_0 = 25\ \mu C$ بالإشارات المبينة. أقفل المفتاح عند $t = 0$ بتوصيل الجهد $\upsilon = 100 \sin (100t + 30°)$ (V). أوجد التيار لقيم $t > 0$.

الجواب: $153.5e^{-4000t} + 48.4 \sin (1000t + 106°)$ (mA).

7-38 ما هي الشحنة الابتدائية على المكثف شكل 7-37 التى تجعل التيار ذو قيمة مستمرة مباشرة بدون فترة عابرة. الجواب: (+على اللوح الأعلى) $13.37\ \mu C$.

7-39 أكتب المعادلات التفاضلية الآنية للدائرة المبينة شكل 7-42 وحلها لإيجاد قيم i_1 ، i_2. أقفل المفتاح عند $t = 0$ بعد أن كان مفتوحاً لفترة زمنية طويلة (يمكن أيضاً حل المسألة باستخدام قيم ابتدائية ونهائية معروفة فى الحل العام كما فى المسألة 7-17).

الجواب: $i_1 = 1.67e^{6.67t} + 5$ (A)، $i_2 = -0.555e^{-6.67t} + 5$ (A).



شكل 7-43 — شكل 7-42

7-40 لـدائرة RL المبينة شـكل 7-43 أوجـد التـيار i_L فى الأزمنة التـالية (أ) -1 ms، (ب) 0^+، (جـ) 0.3 ms، (د) ∞.

الجواب: (أ) 2.00 A، (ب) 2.00 A، (جـ) 2.78 A، (د) 3.00 A.

7-41 دائــرة تــوالى RC بها $R = 2\ k\Omega$ ، $C = 40\ \mu F$ لها منبعين للجهـــد على التوالى مع بعضهما $\upsilon_1 = 50\ V$ ، $\upsilon_2 = -100\ \mu(t)$. أوجد (أ) جهد المكثف عند $t = \tau$ ، (ب) الزمن الذى يكون عنده جهد المكثف صفراً ويعكس الإشارة. الجواب: (أ) $-13.2\ V$، (ب) $55.5\ ms$.

الفصل الثامن

دوائر فوق الدرجة الأولى والترددات المركبة

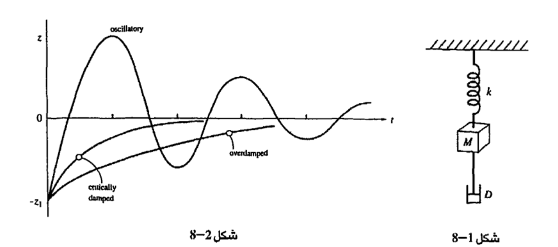
8.1 مقدمة

فى الفصل السابع تم اختيار دوائر RL، RC بتيارات ابتدائية أو شحنة على المكثف وتم حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى للحصول على الجهود والتيارات العابرة. وحينما تحتوى الدائرة على عنصرين أو أكثر من العناصر التى تختزن الطاقة فإن معادلات الشبكة ستكون تفاضلية من الرتبة الثانية. ويقدم هذا الفصل العديد من الأمثلة للدوائر ستكون تفاضلية من الرتبة الثانية. وسنوالى ذلك بتحليلها بطرق مباشرة متضمنة الترددات المركبة ورسومات للقطب/ الصفر.

8-2 دائرة التوالى RLC

الدائرة التفاضلية ذات الرتبة الثانية التى ستبحث حالياً لها حل يمكن أن يأخذ صور مختلفة كل منها يعتمد على عناصر الدائرة. ولتوضيح الاحتمالات الثلاثية يمكن اعتبار النظام الميكانيكى ذو الرتبة الثانية المبينة شكل 8-1. الكتلة M معلقة بالياى ذو الثابت k. ومتصل أيضاً بالكتلة M نبيطة لخمد الحركة D . وإذا تحركت الكتلة من وضع السكون ثم تركت حرة الحركة عند $t = 0$ فإن حركتها ستكون ذو خمد زائد أو خمد خرج أو خمد ناقص (متذبذب).

شكل 8-2 يبين رسم الحركات الناتجة للكتلة بعد تركها حرة الحركة من الوضع ذو الإزاحة z_1 (عند $t = 0$).



شكل 2–8

شكل 1–8

دائرة التوالى RLC المبينة شكل 3-8 لا تحتوى على منبع جهد . وبذلك يكون قانون كيرشف للجهد للحلقة المغلقة بعد قفل المفتاح هو :

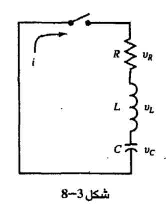
$$v_R + v_L + v_C = 0$$

$$R_i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0$$

وبإجراء التفاضل والقسمة على L تؤول إلى :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

والحل لهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية بأخذ الصورة $i = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_1t}$.



شكل 3–8

وبالتعويض بهذا الحل فى المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$A_1 e^{s_1 t}\left(s_1^2 + \frac{R}{L}s_1 + \frac{1}{LC}\right) + A_2 e^{s_2 t}\left(s_2^2 + \frac{R}{L}s_2 + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

إى أن S_1 ، S_2 هما جذرى المعادلة $S^2 + (R/L)s + (1/LC) = 0$

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv -\alpha + \beta \qquad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv -\alpha - \beta$$

حيث $\alpha = R/2L$ ، $\beta = \sqrt{\alpha_2 + \omega^0{}_0}$ ، $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

حالة الخمد الزائد $(\alpha > \omega_0)$:

فى هذه الحالة يكون كلاً من α ، β أعداد حقيقية موجبة .

$$i = A_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + A_2 e^{(-\alpha-\beta)t} = e^{-\alpha t}(A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

مثـــال 8-1 : دائرة توالى RLC بها $R = 200\ \Omega$ ، $L = 0.10$ H ، $C = 13.33\ \mu F$ ويحمل المكثف شحنة ابتدائية $Q_0 = 2.67 \times 10^{-3}$ C . اقفل المفتاح عند $t = 0$ ليقوم المكثف بتفريغ شحنته . أوجد التيار العابر . (انظر شكل 4-8) .

لهذه الدائرة .

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 10^3\ s^{-1}, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 7.5 \times 10^5\ s^{-2}, \qquad \text{and} \qquad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 500\ s^{-1}$$

Then,

$$i = e^{-1000t}(A_1 e^{500t} + A_2 e^{-500t})$$

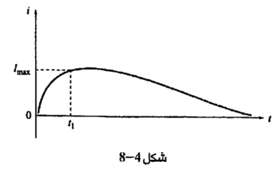
الثابتان A_1 ، A_2 نحصل عليهما من الحالات الابتدائية . ويتطلب الملف أن تكون $i(0^+) = i(0^-)$ وكذلك تكون الشحنة والجهد على المكثف عند $t = 0^+$ بنفس القيم عند $t = 0^-$ وأيضاً $\upsilon_C(0^-) = Q_0/C = 200$ V . وباستخدام هاتين الحالتين .

$$0 = A_1 + A_2 \qquad \text{and} \qquad \pm 2000 = -500A_1 - 1500A_2$$

ومنها $A_1 = \pm 2$ ، $A_2 = +2$ وباعتبار A_1 موجبة .

$$i = 2e^{-500t} - 2e^{-1500t} \quad \text{(A)}$$

وإذا أخذنا القيمة السالبة للمقدار A_1 فإن الدالة ستضغط قليلاً لأسفل ولكنها بنفس الشكل. وتتحدد إشارات A_1 ، A_2 بإشارات الجهد الابتدائى على المكثف وعلاقته بالإتجاه الموجب المفترض للتيار.



شكل 8-4

حالة الخمد الحرج : $(\alpha = \omega_0)$:

باعتبار $\alpha = \omega_0$ فإن المعادلة التفاضلية تأخذ شكلاً مختلفاً من الدالتين الأسيتين السابقة وهما لا يؤديان للحل. وحينئذ تصبح المعادلة.

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha\frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

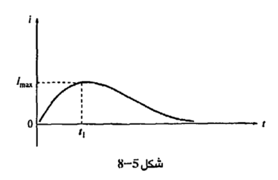
ويكون الحل فى صورة $i = e^{-\alpha t}(A_1 + A_2 t)$.

مثـــال 8-2 : أعد حل مثال 8-1 لقيم $C = 10\ \mu F$ وحيث ينتج $\alpha = \omega_0$.

كما فى مثال 8-1 تستخدم الحالات الابتدائية لتحديد الثوابت وحيث أن $i(0^-) = i(0^+)$، $0 = [A_1 + A_2(0)]$ ، $A_1 = 0$ فإن :

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(A_2 t e^{-\alpha t}) = A_2(-\alpha t e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

ومنها $A_2 = (di/dt)|_{0+} = \pm 2000$ ولذلك $i = \pm 2000 e^{-10^3 t}$ (A) . (انظر شكل 8-5) . ومرة أخرى فإن القطبية (الإشارة) هى مسألة تتعلق بإتجاه التيار بالنسبة لقطبية الجهد الابتدائى على المكثف.



شكل 5–8

الاستجابة لكل من الخمد الزائد والخمد الحرج متشابهة كما فى شكل 4-8، 5-8 على التوالى. وعلى القارئ أن يختبر النتائج باختيار قيم متعددة للزمن t ومقارنة التيارات. وعلى سبيل المثال: أوجد الزمن الذى يصل عنده التيار فى كلا الحالتين للقيمة 1 mA، 1 µA. وأيضاً أوجد فى كل حالة الزمن t_1 للقيم العظمى للتيارات.

الخمد الناقص أو حالة التذبذب $(\alpha < \omega_0)$:

حينما تكون $\alpha < \omega_0$، S_2 وS_1 فى حل المعادلة التفاضلية المقترحة فيما سبق هى قيم مركبة مترافقة $S_1 = \alpha + j\beta$، $S_2 = \alpha - j\beta$ حيث تعطى الآن β بالقيمة $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ ويكتب الحل بالصورة الأسية كما يلى:

$$i = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t})$$

ويكون بالصورة الجيبية هو:

$$i = e^{-\alpha t}(A_3 \cos \beta t + A_4 \sin \beta t)$$

مثـــال 3-8: أعد حل مثال 1-8 بحيث يكون C = 1 µF.

كما سبق

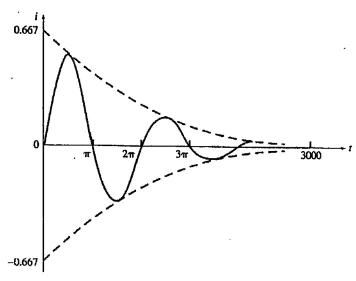
$$\alpha = \frac{R}{2L} = 1000\ \text{s}^{-1} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^7\ \text{s}^{-2} \qquad \beta = \sqrt{10^7 - 10^6} = 3000\ \text{rad/s}$$

Then, $$i = e^{-1000t}(A_3 \cos 3000t + A_4 \sin 3000t)$$

يمكن الحصول على الثابتين A_3 ، A_4 من الحالات الابتدائية كما سبق، $i(0^+) = 0$ ، $V_C(0^+) = 200$ V ومنها $A_3 = 0$ ، $A_4 = \pm 0.667$ لذلك:

$$i = \pm 0.667 e^{-1000t} (\sin 3000t) \quad (A)$$

انظر شكل 6-8 الدالة $\pm 0.667e^{-1000t}$ المبينة بالمنحنى المنقوط ترسم الغلاف الذى بداخله تتحقق الدالة الجيبية . وتردد التيار المتذبذب بالتقدير الدائرى هو β- (rad/s) ، ولكنه يخمد بواسطة الحد الأسى $e^{-\alpha t}$.



شكل 6–8

3-8 دائرة التوازى RLC

استجابة دائرة التوازى RLC المبينة شكل 7-8 ستكون مشابهة لدائرة التوالى RLC حيث نتوقع المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية . وتعطى طريقة جهد العقدة .

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,dt + C\frac{dv}{dt} = 0 \qquad (1)$$

بإجراء التفاضل والقسمة على C نحصل على :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

ويكون الحل فى الصورة :

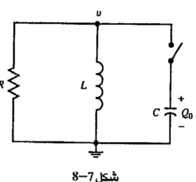
$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad (2)$$

حيث

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

حيث $\alpha = 1/2\,RC$ ، $\omega_0 = 1\sqrt{LC}$. يلاحظ أن α (معامل الخمد) للقيمة العابرة تختلف عن α فى دائرة التوالى RLC .



شكل 7–8

من الأسهل تحقيق الاستجابة العابرة بافتراض قيمة ابتدائية للشحنة Q_0 على المكثف وقفل المفتاح عند $t = 0$. ومع هذا فإنه باستخدام دالة جهد سلمية للدائرة سينشأ عنه نفس الاستجابة العابرة.

حالة الخمد الزائد ($\alpha^2 > \omega_0^2$) :

هنا نستخدم الحل (2) .

مثـــــال 4-8 : دائرة توازى RLC لها $R = 1000\ \Omega$ ، $C = 0.167\ \mu F$ ، $L = 1.0\ H$. لها جهد ابتدائى $V_0 = 50.0\ V$ على المكثف . أوجد الجهد $v(t)$ حينما يقفل المفتاح عند $t = 0$.

لدينا :

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2994 \qquad \alpha^2 = 8.96 \times 10^6 \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 5.99 \times 10^6$$

حيث تكون $\omega_0^2 < \alpha^2$ فإن الدائرة تكون ذات خمد زائد ومن (2) نحصل على :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1271 \qquad \text{و} \qquad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -4717$$

عند $t = 0$

$$V_0 = A_1 + A_2 \qquad \text{و} \qquad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = s_1 A_1 + s_2 A_2$$

من معادلة العقدة (1)، وعند $t = 0$ ومع عدم وجود أى تيار ابتدائى فى الملف L .

$$\frac{V_0}{R} + C\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \text{or} \qquad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{V_0}{RC}$$

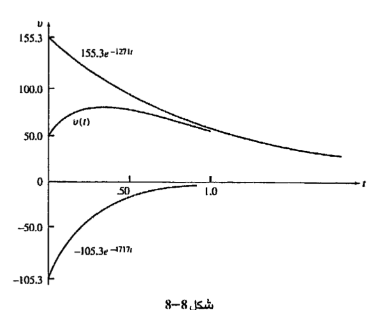
وبالحل لقيم A_1

$$A_1 = \frac{V_0(s_2 + 1/RC)}{s_2 - s_1} = 155.3 \qquad \text{and} \qquad A_2 = V_0 - A_1 = 50.0 - 155.3 = -105.3$$

وبالتعويض فى (2)

$$v = 155.3e^{-1271t} - 105.3e^{-4717t} \quad \text{(V)}$$

انظر شكل 8-8



شكل 8–8

حالة الخمد الناقص : (المتذبذب) حالة ($\omega^2_0 > \alpha^2$) :

ينشأ عن الحالة المتذبذبة لدائرة التوازى RLC معادلة لها نفس صورة معادلة الخمد لدائرة RLC التوالى.

$$v = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \qquad (3)$$

حيث $\alpha = 1/2\,RC$ ، $\omega_d = \sqrt{\omega^2_0 - \alpha^2}$ وهى التردد الدائرى تماماً كما كانت فى حالة تحليل الدائرة الجيبية. وهنا تعطى تردد تذبذب الخمد ويرمز لها بأنها التردد الدائرى للخمد.

مثال 8-5 :

دائرة توازى RLC بها $R = 200\ \Omega$ ، $L = 0.28\ H$ ، $C = 3.57\ \mu F$. لها جهد ابتدائى $V_0 = 50.0$ V على المكثف. أوجد دالة الجهد حينما يقفل ا لمفتاح عند $t = 0$.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(200)(3.57 \times 10^{-6})} = 700 \qquad \alpha^2 = 4.9 \times 10^5 \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{(0.28)(3.57 \times 10^{-6})} = 10^6$$

حيث أن $\omega^2_0 > \alpha^2$ فإنه ينتج عن معاملات الدائرة استجابة متذبذبة.

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^6 - (4.9 \times 10^5)} = 714$$

عند $t = 0$ ، $V_0 = 50.0$ V وبذلك فى المعادلة (3) $A_1 = V_0 = 50.0$. ومن معادلة العقدة

$$\frac{V_0}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,dt + C\frac{dv}{dt} = 0$$

at $t = 0$,

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{V_0}{RC}$$

وبتفاضل معادلة v ووضع $t = 0$ ينتج.

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \omega_d A_2 - \alpha A_1 \qquad \text{or} \qquad \omega_d A_2 - \alpha A_1 = -\frac{V_0}{RC}$$

وحيث أن $A_1 = 50.0$.

$$A_2 = \frac{-(V_0/RC) + V_0\alpha}{\omega_d} = -49.0$$

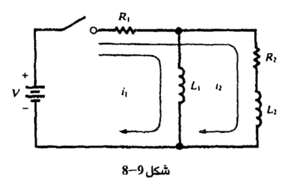
وبذلك

$$v = e^{-700t}(50.0 \cos 714t - 49.0 \sin 714t) \quad (V)$$

لن تناقش حالة الخمد الحرج لدائرة التوازى RLC حيث أنها نادرة الوجود فى تصميم الدوائر. وبدافع الفضول لمعرفة ما يحدث فهى مجموعة من ثوابت الدائرة تكون استجابتها عند خمدها على شفا التذبذب.

8-4 الدائرة ذات الشبيكتين:

تحليل استجابة الدائرة ذات الشبيكتين المحتوية على عنصرين لتخزين الطاقة ينشأ عنها معادلة تفاضلية آنية كما هو مبين فيما يلى:



شكل 9-8

للدائرة المبية شكل 9-8 اختار تيارى شبيكات i_1 ، i_2 كما هو مبين. وباستخدام KVL نحصل على معادلتين تفاضليتين من الدرجة الأولى.

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 = V$$

$$R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = V$$

التى تحل آنياً. ولأداء ذلك أوجد التفاضل بالنسبة للزمن للمعادلة (4).

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_2}{dt} = 0 \qquad (6)$$

ثم أحذف i_2 ، di_2/dt بين المعادلات (4)، (5)، (6) وينتج عن ذلك معادلة من الدرجة الثانية فى i_1 من النوع الذى سبق التعامل معه فى بند 8-2، 8-3 فيما عد الحد الثابت على اليمين.

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} i_1 = \frac{R_2 V}{L_1 L_2} \qquad (7)$$

الحــل المستقر للمعادلة (7) يكون من الواضح $i_1(\infty) = \frac{V}{R_1}$ ، والحل العـابر نصل إليه بالجذرين S_1 ، S_2 للمعادلة .

$$s^2 + \frac{R_1L_1 + R_2L_1 + R_1L_2}{L_1L_2}s + \frac{R_1R_2}{L_1L_2} = 0$$

وباعتبار الحالات الابتدائية .

$$i_1(0^+) = 0 \qquad \left.\frac{di_1}{dt}\right|_{0^+} = \frac{V}{L_1}$$

(كلا i_1 ، i_2 يجب أن يكونا مستمرين عند $t = 0$) وبمجرد معرفة العلاقة للتيار i_1 فإنه يتبع ذلك معرفة i_2 من المعادلة (4) .

وسيكون هناك معامل خمد الذى يؤكد أن القيمة العابرة ستتلاشى كليةً . وأيضاً بالرجوع لقيم الثوابت الأربعة فى الدائرة فإن القيمة العابرة يمكن أن تكون ذات خمد زائد أو خمد ناقص . والتى تكون متذبذبة . وبصورة عامة فإن علاقة التيار ستكون .

$$i_1 = (\text{transient}) + \frac{V}{R_1}$$

الجزء العابر ستكون قيمته $-V/R_1$ عند $t = 0$ والقيمة صفراً عند $t \to \infty$

8-5 التـردد المركـب

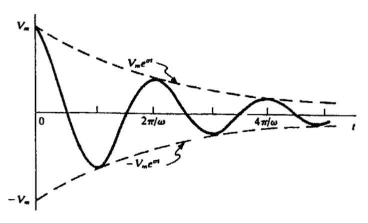
اختبرنا الدوائر التى يكون فيها الدالة الدافعة (المنبع) له قيمة ثابتة مثل $V = 50.0$ v أو دالة جيبية مثل $\upsilon = 100.0 \sin(500t + 30^\circ)$ (V) أو دالة أسية مثل $\upsilon = 10e^{-st}$ ، وفى هذا الجزء سنتعرض لتردد مركب s والذى يشمل الثلاث دوال وسنبسط التحليل فيما إذا كان المطلوب الاستجابة العابرة أو المستقرة .

وسنبدأ بالتعبير عن الدالة الأسية بأدلة جيب التمام والجيب المكافئة .

$$e^{j(\omega t+\phi)} = \cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)$$

وسنركز بشيئ من التوضيح على حد جيب التمام $\cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\, e^{j(\omega t+\phi)}$ وسنكتفى بإسقاط الرمز الدال على القيمة الحقيقية Re واستخدام الثابت A والمعامل $e^{\sigma t}$.

$$Ae^{\sigma t}e^{j(\omega t+\phi)} = Ae^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi) \qquad Ae^{j\phi}e^{(\sigma+j\omega)t} = Ae^{j\phi}e^{st} \quad \text{where } s = \sigma + j\omega$$



شكل 10-8

والتردد المركب $s = \delta + j\omega$ له الوحدات S^{-1} ، ω كما نعلم لها الوحدات rad/s . وبالتالى تكون الوحدات الخاصة بالقيمة δ يجب أن تكون أيضاً S^{-1} . وهذا هو التردد النيبيرى بوحدات Np/s . وإذا كان كلاً من σ ، ω ليس صفراً فإن الدالة تكون دالة جيب تمام المخمودة وسنأخذ فى الاعتبار قيم δالسالبة فقط . وإذا كان كلاً من σ ، ω صفراً فإن الناتج يكون قيمة ثابتة . وأخيراً عند $\omega = 0$ ، $\sigma \neq 0$ فإن الناتج يكون دالة أسية متناقصة . ومبين فى جدول 8-1 دوال متعددة للعلاقة Ae^{st} لقيم s المناظرة .

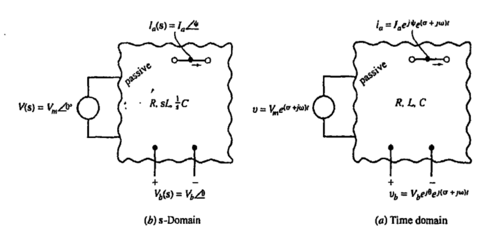
جـــدول 8-1

$f(t)$	s	A
$10e^{-5t}$	$-5 + j0$	10
$5\cos(500t + 30°)$	$0 + j500$	5
$2e^{-3t}\cos(100t - 45°)$	$-3 + j100$	2
100.0	$0 + j0$	100.0

وعند اختيار شكل 10-8 لقيم مختلفة للمتغير s فإننا نتوقع الثلاث حالات وهى : عند $\sigma = 0$ فإنه لا يوجد خمد والناتج هو دالة جيب تمام بقيمة عظمى $\pm Vm$ (ليست مبينة) وعند $\omega = 0$ فإن الدالة تكون أسية ومتناقصة بقيمة ابتدائية V_m . وأخيراً حينما يكون كلاً من ω ، σ ليس صفراً فإن الناتج يكون دالة خمد لجيب التمام .

8-6 المعاوقة العامة (R ،L ،C) فى مجال s

إذا وصلنا جهد منبع له القيمة $\upsilon = V_m e^{st}$ لشبكة غير فعالة فإنه سيمر فى أفرعها تياراً وسيكون هناك جهد على طرفى كل عنصر وجميعها لها نفس أساس المقارنة الزمنى e^{st} . فمثلاً $I_a e^{j\psi} e^{st}$ ، $V_b e^{j\phi} e^{st}$ وبالتالى فإن قيم التيارات والجهود وزوايا الوجه هى التى نحتاج لمعرفتها (وهذه ستكون أيضاً الحالة فى تحليل الدوائر الجيبية التى فى الفصل التاسع) . وهذا يقودنا إلى اعتبار الدائرة فى مجال s (انظر شكل 11-8) .



شكل 11–8

دائرة توالى RL عليها الجهد $\upsilon = V_m e^{j\phi} e^{st}$ ينشأ عنها التيار $i = I_m e^{j\psi} e^{st} = I_m e^{st}$ وبالتعويض فى معادلة العقدة .

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_m e^{j\phi} e^{st}$$

والتى ينتج عنها :

$$RI_m e^{st} + sLI_m e^{st} = V_m e^{j\phi} e^{st} \qquad \text{from which} \qquad I_m = \frac{V_m e^{j\phi}}{R + sL}$$

لاحظ أن تمثيل معاوقة التوالى RL فى مجال s هو R + SL . وبذلك تكون الممانعة فى مجال معاوقة s هى SL .

مثـــال 6-8 : دائرة توالى RL لها $R = 4\ \Omega$ ، $L = 2\ H$ وجهد المنبع $\upsilon = 10\ e^{st} \cos(10t + 30°)$.

أوجد التيار i بطريقة تحليل مجال s .

$$\upsilon = 10\underline{/30°}\, e^{st} = Ri + L\frac{di}{dt} = 4i + 2\frac{di}{dt}$$

وحيث أن $i = Ie^{st}$:

$$10\underline{/30^\circ}\, e^{st} = 10Ie^{st} + 2sIe^{st} \qquad \text{or} \qquad I = \frac{10\underline{/30^\circ}}{10 + 2s}$$

وبالتعويض $s = -2 + j10$:

$$I = \frac{10\underline{/30^\circ}}{10 + 2(-2 + j10)} = \frac{10\underline{/30^\circ}}{6 + j10} = 0.86\underline{/-29.0^\circ}$$

Then, $i = Ie^{st} = 0.86e^{-2t}\cos(10t - 29.0^\circ)$ (A).

مثـــال 8-7 : دائرة توالى RC بها $R = 10\ \Omega$ ، $C = 0.2\ F$ عليها نفس الجهد كما فى المثال 8-6 . أوجد التيار بالتحليل فى مجال s .

كما فى مثال 8-6 .

$$v = 10\underline{/30^\circ}e^{st} = Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = 10i + 5\int i\,dt$$

وحيث أن $i = Ie^{st}$

$$10\underline{/30^\circ}e^{st} = 10Ie^{st} + \frac{5}{s}Ie^{st} \qquad \text{from which} \qquad I = \frac{10\underline{/30^\circ}}{10 + 5/s} = 1.01\underline{/32.8^\circ}$$

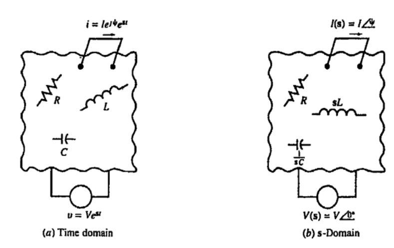
لاحظ أن المعاوقة للمكثف فى مجال s هى $1/sC$ وبالتالى فإن معاوقة دائرة التوالى RLC فى مجال s ستكون $Z(s) = R + sL + 1/sC$.

8-7 دالة الشبكة ورسومات قطب/صفر

عند تطبيق جهد منبع له القيمة $v = Ve^{st}$ لشبكة غير فعالة فإنه ستنشأ تيارات وجهود فى أجزاء الشبكة المختلفة كلا منها له نفس أساس المقارنة الزمنى وهو e^{st} كمثال $Ie^{j\psi}e^{st}$. ولذلك فإننا نحتاج فقط لمعرفة قيم التيار I وزاوية الوجه ψ . وبالتالى نصل إلى اعتبار أنه فى مجال s فإننا نمثل كلاً من الجهود والتيارات بالصورة القطبية فمثلاً $V\underline{/\theta}$ ، $I\underline{/\psi}$ وهكذا. شكل 8-12 يقترح التناظر بين الشبكة فى مجال الزمن حيث $s = \sigma + j\omega$ وفى مجال s حيث توجد فقط القيمة المطلقة وزوايا

الوجه. ونعبر فى مجال s لممانعة الملف بالقيمة SL، والمكثف بالقيمة 1/sC. والمعاوقة فى مجال s هى

$$z(s) = V(s) / I(s)$$



(a) Time domain

(b) s-Domain

شكل 12–8

تعرف دالة الشبكة H(s) بالنسبة بين القيم المركبة لخرج أسى Y(s) إلى القيمة المركبة لدخل أسى X(s). وكمثال إذا كان X(s) هو جهد منبع، Y(s) هو جهد الخرج فإن النسبة Y(s) / V(s) تكون بدون وحدات.

ودالة الشبكة H(s) يمكن استنتاجها من معادلة الدخل/الخرج التفاضلية.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

حيث $x(t) = Xe^{st}$ ، $y(s) = Ye^{st}$.

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)e^{st} = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)e^{st}$$

ومن ثم،

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

فى الدوائر الخطية المكونة من مجموعة عناصر تكون دالة الشبكة H(s) دالة جذرية لقيم s ويمكن كتابتها بالصورة العامة التالية:

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_\mu)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_\nu)}$$

حيث k هو رقم صحيح والثوابت المركبة z_m $(m = 1, 2, \dots \mu)$ ، القيم الصفرية للدالة H(s) و p_n $(n = 1, 2, \dots \nu)$ القيم القطبية للدالة H(s)، ويجب ملاحظة حالات H(s) الغير متصلة وبالتالى فإنه عند $s = z_m$ فإن الاستجابة تساوى صفراً بغض النظر عن كبر قيمة الإثارة. وحيث $s = p_n$ فإن الاستجابة ستكون ما لا نهاية بغض النظر عن صغر قيمة الإثارة.

مثـــال 8-5 : فى الدائرة الغير فعالة فى مجال s المبينة شكل 13-8. أوجد دالة الشبكة للتيار I(s) الناتج عن جهد دخل V(s).

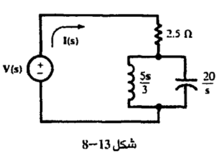
$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)}$$

Since

$$Z(s) = 2.5 + \frac{\left(\frac{5s}{3}\right)\left(\frac{20}{s}\right)}{\frac{5s}{3} + \frac{20}{s}} = (2.5)\frac{s^2 + 8s + 12}{s^2 + 12}$$

we have

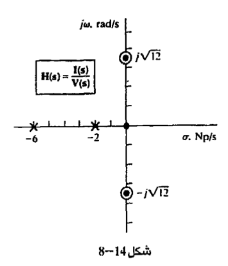
$$H(s) = (0.4)\frac{s^2 + 12}{(s+2)(s+6)}$$



شكل 13–8

المقام للدالة H(s) فى مثال 8-8 يكون صفراً عندما $s = \pm j\sqrt{12}$. وبالتالى فإن دالة الجهد عند هذا التردد ينتج عنها تياراً قيمته صفراً. فى فصل 12 حيث نناقش دائرة الرنين التوالى والتوازى سنجد أن دائرة التوازى LC تكون ذات رنين عند $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ومع $L = (5/3)$ H ، $C = (1/20)$ F، $\omega = \sqrt{12}$ rad/s.

يمكن رسم أصفار أقطاب دالة الشبكة H(s) فى المستوى s المركب. وشكل 14-8 يبين أقطاب وأصفار الدالة لمثال 8-8 بأن تأخذ الأصفار العلامة @ وتأخذ الأقطاب العلامة x وتحدث الأصفار على شكل أزواج مترافقة $s = \pm j\sqrt{12}$ والأقطاب هى $S = -2$ ، $S = -6$.



شكل 14–8

8-8 الاستجابة القسرية

يمكن التعبير عن دالة الشبكة بالصورة القطبية والحصول على الاستجابة بالرسم. وقبل البدء فى تطوير ذلك فإنه من المفيد أن نسترجع أن H(s) هى مجرد نسبة مثل $V_0(s) / V_i(s)$ ، $I_2(s) / V_1(s)$ ، $I_2(s) / I_1(s)$. ومع متعدد الحدود نجد أن:

$$\mathbf{H(s)} = k\,\frac{(\mathbf{s}-\mathbf{z}_1)(\mathbf{s}-\mathbf{z}_2)\cdots(\mathbf{s}-\mathbf{z}_\mu)}{(\mathbf{s}-\mathbf{p}_1)(\mathbf{s}-\mathbf{z}_2)\cdots(\mathbf{s}-\mathbf{p}_\nu)}$$

Now setting $(\mathbf{s}-\mathbf{z}_m) = N_m\underline{/\alpha_m}(m = 1, 2, \ldots, \mu)$ and $(\mathbf{s}-\mathbf{p}_n) = D_n\underline{/\beta_n}(n = 1, 2, \ldots, \nu)$, we have

$$\mathbf{H(s)} = k\,\frac{(N_1\underline{/\alpha_1})(N_2\underline{/\alpha_2})\cdots(N\underline{/\alpha_\mu})}{(D_1\underline{/\beta_1})(D_2\underline{/\beta_2})\cdots(D\underline{/\beta_\nu})} = k\,\frac{N_1N_2\cdots N_\mu}{D_1D_2\cdots D_\nu}\underline{/(\alpha_1+\cdots+\alpha_\mu)-(\beta_1+\cdots+\beta_\nu)}$$

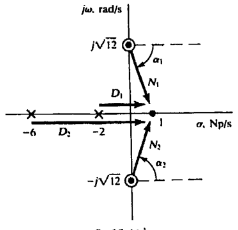
وبالتالى فإن استجابة الشبكة لإثارة لها $S = \sigma + j\omega$ تحدد بقياس أطوال المتجهات من الأصفار والأقطاب إلى s وأيضاً بالزاوايا التى تصنعها هذه المتجهات مع الإتجاه الموجب لمحور σ فى تمثيل القطب/ الصفر.

مثـــال 9-8 : أختبر استجابة الشبكة فى مثال 8-8 لجهد إثارة أسى حيث $\upsilon = 1e^{st}$ حيث $s = 1$ Np/s .

حدد نقطة الاختبار $1 + j0$ على رسم قطب/ صفر . ارسم المتجهات من الأقطاب والأصفار إلى نقطة الاختبار واحسب الأطوال والزوايا (انظر شكل 15-8) . لذلك :

$$N_1 = N_2 = \sqrt{13}, D_1 = 3, D_2 = 7, \beta_1 = \beta_2 = 0, \text{ and } \alpha_1 = -\alpha_2 = \tan^{-1}\sqrt{12} = 73.9°$$

Hence,
$$\mathbf{H}(1) = (0.4)\frac{(\sqrt{13})(\sqrt{13})}{(3)(7)}\underline{/0° - 0°} = 0.248$$



شكل 15-8

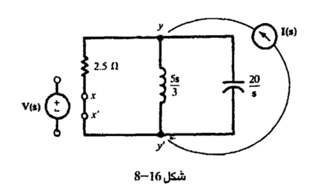
تبين النتائج أنه فى حيز الزمن (مجال الزمن) $i(t) = 0.248\ \upsilon(t)$ سيصبح كلاً من الجهد والتيار ما لا نهاية طبقاً للدالة e^{1t} . وفى معظم الحالات العملية فإن σ يجب إما أن تكون سالبة أو صفراً .

والطريقة الهندسية السابقة لا يبدو أنها تتطلب معلومات عن تحليل للعلاقة $H(s)$ كدالة جذرية . ومع هذا فإنه من الواضح إمكانية كتابة العلاقة فى حدود المعامل الثابت k من الأقطاب والأصفار المعروفة للعلاقة $H(s)$ فى رسم قطب/ صفر . انظر المسألة 37-8 .

8-9 الاستجابة الطبيعية

ركز هذا الفصل على الاستجابة القسرية والاستجابة المستقرة وساعدت طريقة التردد المركب فى الحصول على الاستجابة . ومع هذا فإن الترددات الطبيعية التى تصف الاستجابة العابرة سهل الحصول عليها . وهى أقطاب دالة الشبكة .

مثـــال 10-8 : نفس الشبكة فى مثال 8-8 مبينة فى شكل 16-8 . أوجد الاستجابة الطبيعية حينما نضع منبع $V(s)$ بدلاً من xx' .



شكل 8-16

دالة الشبكة كما فى مثال 8-8 .

$$H(s) = (0.4)\frac{s^2 + 12}{(s+2)(s+6)}$$

الترددات الطبيعية هى -2Np/s ، -6Np/s . لذلك فإن التيار الطبيعى أو العابر فى المجال الزمنى سيأخذ الشكل .

$$i_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

حيث الثابتان A_1 ، A_2 يحددان باستخدام الحالات الابتدائية للاستجابة الكاملة $i = i_n + i_f$ حيث i_f يبين الاستجابة القسرية .

مثــــال 8-11 : تغـذى الشبـكة فى شـكل 8-16 بالتيار I(s) على طرفى yy' . وتكون دالة الشبكة $H(s) = V(s) / I(s) = Z(s)$ الأفرع الثلاثة تكون على التوازى وبذلك :

$$H(s) = Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{2.5} + \frac{3}{5s} + \frac{s}{20}} = \frac{20s}{(s+2)(s+6)}$$

ومرة أخرى فإن الأقطاب هى عند -2Np/s ، -6Np/s وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال 8-10 .

8-10 مقياس القيمة والتردد

مقياس القيمة

إذا كانت دالة مقاومة الدخل لشبكة $Z_{in}(s)$ وأيضاً الثابت K_m هو رقم صحيح موجب فإنه إذا استبدلت كل مقاومة R في الشبكة بالقيمة K_mR وكل ملف بالقيمة K_mL وكل مكثف C بالقيمة C/K_m فإن دالة معاوقة الدخل الجديدة ستكون $K_mZ_{in}(s)$ وبذلك نعتبر أن الشبكة قد تغير مقياس قيمتها بالمعامل K_m.

مقياس الترد

إذا حدث بدلاً من التغيير السابق أن أبقينا على قيمة المقاومة R واستبدلنا كلاً من الحث L بالقيمة L/K_f ، $(K_f > 0)$ واستبدلنا العنصر السعوى C بالقيمة C/K_f فإن دالة الدخل الجديدة للمعاوقة ستكون $Z_{in}(SK_f)$ أى أن الشبكة الجديدة لها نفس المعاوقة عند التردد المركب K_fS كما فى الحالة السابقة عند s . وتقول أن الشبكة قد تغير مقياس ترددها بالمعامل K_f .

مثـــال 8-12 : عبر عن Z(s) للدائرة المبينة شكل 8-17 ولاحظ مقياس القيمة الناتج.

$$Z(s) = K_mLs + \frac{(K_mR)\dfrac{K_m}{Cs}}{K_mR + \dfrac{K_m}{Cs}} = K_m\left[Ls + \frac{R(1/Cs)}{R + (1/Cs)}\right]$$

شكل 8-17

توجد عدة تطبيقات عملية مقترحة لهذا الغرض المختصر لقياس القيمة . وكمثال إذا كان تيار الدخل لشبكة أكبر مما يجب أن يكون فإن المعامل $K_m = 10$ سيقلل التيار بالقيمة 1/10 من قيمته السابقة .

مسائل محلولة

8-1 دائرة RLC توالى بها $R = 3\ k\Omega$ ، $L = 10\ H$ ، $C = 20\ \mu F$ وبها منبع جهد ثابت $V = 50\ v$ تم توصيله عند $t = 0$. (أ) أوجد التيار العابر إذا كان المكثف ليس عليه شحنة ابتدائية . (ب) ارسم التيار وأوجد الزمن الذى تكون عنده القيمة العظمى .

(أ)

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 150\ s^{-1} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 500\ s^{-2} \qquad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 148.3\ s^{-1}$$

الدائرة بها خمد زائد $(\alpha > \omega_0)$.

$$s_1 = -\alpha + \beta = -1.70\ s^{-1} \qquad s_2 = -\alpha - \beta = -298.3\ s^{-1}$$

و

$$i = A_1 e^{-1.70t} + A_2 e^{-298.3t}$$

وحيث أن الدائرة تحتوى على عنصر حتى $i(0^+) = i(0^-) = 0$ وأيضاً ، $Q = (0^+) = Q\ (0^-) = 0$. لذلك عند $t = 0^+$ فإن KVL يعطى :

$$0 + 0 + L\frac{di}{dt}\bigg|_{0^+} = V \qquad \text{or} \qquad \frac{di}{dt}\bigg|_{0^+} = \frac{V}{L} = 5\ A/s$$

وبتطبيق هذه الحالات الابتدائية لعلاقة التيار i .

$$0 = A_1(1) + A_2(1)$$
$$5 = -1.70A_1(1) - 298.3A_2(1)$$

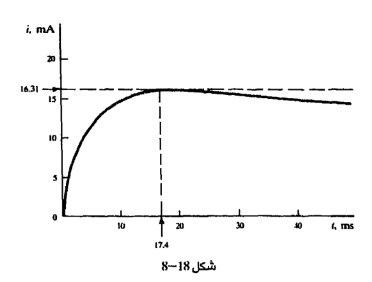
ومنها

$$i = 16.9(e^{-1.70t} - e^{-298.3t}) \quad (mA)$$

(ب) لإيجاد زمن أكبر تيار فإن :

$$\frac{di}{dt} = 0 = -28.73e^{-1.70t} + 5041.3e^{-298.3t}$$

وبالحل باستخدام اللوغارتمات فإن t = 17.4 ms . انظر شكل 8-18 .



شكل 8-18

8-2 دائرة توالى RLC بها R = 50 Ω ، L = 0.1 H ، C = 50 μ لها جهد ثابت V = 100 V طبق هذا الجهد عند t = 0 . أوجد التيار العابر باعتبار الشحنة الابتدائية على المكثف = صفراً.

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 250\ \text{s}^{-1} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 2.0 \times 10^5\ \text{s}^{-2} \qquad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = j370.8\ \text{rad/s}$$

هذه حالة تذبذب ($\alpha < \omega_0$) ويكون التعبير العام للتيار هو :

$$i = e^{-250t}(A_1 \cos 370.8t + A_2 \sin 370.8t)$$

والحالات الابتدائية التى حصلنا عليها كما فى المسألة 8-1 هى :

$$i(0^+) = 0 \qquad \left.\frac{di}{dt}\right|_{0^+} = 1000\ \text{A/s}$$

وهذه تحدد القيم $A_1 = 0$ ، $A_2 = 2.70$ A وبالتالى :

$$i = e^{-250t}(2.70 \sin 370.8t) \quad \text{(A)}$$

8-3 أعد حل المسألة 2-8 إذا كان للمكثف شحنة ابتدائية $Q_0 = 2500\ \mu C$.

كل شيئ سيبقى كما هو كما فى المسألة 2-8 فيما عد الحالة الابتدائية الثانية التى ستكون هنا .

$$0 + L\frac{di}{dt}\bigg|_{0^-} + \frac{Q_0}{C} = V \qquad \text{or} \qquad \frac{di}{dt}\bigg|_{0^+} = \frac{100 - (2500/50)}{0.1} = 500\ \text{A/s}$$

القيم الابتدائية هنا تكون نصف القيم الابتدائية التى فى المسألة 2-8 بالتناسب فإن :

$$i = e^{-250t}(1.35 \sin 370.8\,t) \quad \text{(A)}$$

8-4 دائرة توازى RLC بها $R = 50.0\ \Omega$ ، $C = 200\ \mu F$ ، $L = 55.6\ mH$ لها شحنة ابتدائية على المكثف $Q_0 = 5.0\ mC$. أوجد قيمة الجهد اللازم للشبكة .

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 50\ \text{s}^{-1} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 8.99 \times 10^4\ \text{s}^{-2}$$

حيث أن $\omega^2_0 > \alpha^2$ فإن دالة الجهد تكون متذبذبة وبالتالى : $\omega_d = \sqrt{\omega^2_0 - \alpha^2} = 296$ rad/s
ويكون التعبير العام للجهد بالقيمة :

$$v = e^{-50t}(A_1 \cos 296t + A_2 \sin 296t)$$

ومع $Q_0 = 5.0 \times 10^{-3}$ C ، $V_0 = 25.0$ V عند $t = 0$ ، $v = 25$ V لذلك $A_1 = 25.0$.

$$\frac{dv}{dt} = -50e^{-50t}(296)(-A_1 \sin 296t + A_2 \cos 296t)$$

وعند $t = 0$ ، $dv/dt = -V_0/RC = \omega_d A_2 - \alpha A_1$ ومنها $A_2 = -4.22$ ولذلك .

$$v = e^{-50t}(25.0 \cos 296t - 4.22 \sin 296t) \quad \text{(V)}$$

8-5 فى شكل 19-8 أقفل المفتاح عند $t = 0$ أوجد التيار i وجهد المكثف v_C عند $t > 0$. بأخذ الاستجابة الطبيعية للدائرة فى الاعتبار فإن المقاومتين على التوازى وبالتالى :

$$\tau = R_{eq}C = (5\ \Omega)(2\ \mu\text{F}) = 10\ \mu\text{s}$$

وبالاستمرارية $\upsilon(0^+) = \upsilon(0^-) = 0$ وعلاوة على ذلك فإنه كلما $t \to \infty$ فإن المكثف يصبح دائرة مفتوحة تاركاً المقاومة 20 Ω على التوالى مع الجهد 50 v أى أن :

$$i(\infty) = \frac{50}{20} = 2.5 \text{ A} \qquad v_C(\infty) = (2.5 \text{ A})(10\ \Omega) = 25 \text{ V}$$

وبمعرفة حالات النهاية على υ_C يمكن كتابة :

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = 25(1 - e^{-t/10}) \quad \text{(V)}$$

حيث t تقاس بالميكروثانية μs ويعطى تيار المكثف بالعلاقة :

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = 5e^{-t/10} \quad \text{(A)}$$

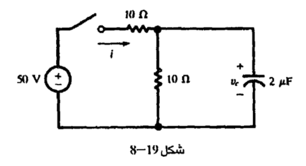
وتيار مقاومة التوازى 10 Ω بالعلاقة :

$$i_{10\Omega} = \frac{v_C}{10\ \Omega} = 2.5(1 - e^{-t/10}) \quad \text{(A)}$$

Hence

$$i = i_C + i_{10\Omega} = 2.5(1 + e^{-t/10}) \quad \text{(A)}$$

ويمكن حل المسألة باعتبار تيارات الشبيكة وحل المعادلات التفاضلية الآنية :



شكل 19—8

8-6 لدوال الزمن المذكورة فى العمود الأول للجدول 2-8 أكتب القيم وزوايا الوجه المناظرة (على أساس جيب التمام) والتردد المركب s .

انظر عمود 3-2 بالجدول .

جـــدول 8-2

Time Function	$A\angle\phi°$	s
$i(t) = 86.6$ A	$86.6\angle 0°$ A	0
$i(t) = 15.0e^{-2\times10^3 t}$ (A)	$15.0\angle 0°$ A	-2×10^3 Np/s
$v(t) = 25.0\cos(250t - 45°)$ (V)	$25.0\angle -45°$ V	$\pm j250$ rad/s
$v(t) = 0.50\sin(250t + 30°)$ (V)	$0.50\angle -60°$ V	$\pm j250$ rad/s
$i(t) = 5.0e^{-100t}\sin(50t + 90°)$ (A)	$5.0\angle 0°$ A	$-100\pm j50$ s^{-1}
$i(t) = 3\cos 50t + 4\sin 50t$ (A)	$5\angle -53.13°$ A	$\pm j50$ rad/s

8-7 لكل قيمة وزاوية وجه فى العمود الأول والتردد المركب s فى العمود الثانى فى جدول 8-3 أكتب دوال الزمن المناظرة.

انظر العمود 3 بالجدول.

جـــدول 8-3

$A\angle\phi°$	s	Time Function
$10\angle 0°$	$+j120\pi$	$10\cos 120\pi t$
$2\angle 45°$	$-j120\pi$	$2\cos(120\pi t + 45°)$
$5\angle -90°$	$-2\pm j50$	$5e^{-2t}\cos(50t - 90°)$
$15\angle 0°$	$-5000\pm j1000$	$15e^{-5000t}\cos 1000t$
$100\angle 30°$	0	86.6

8-8 قيمة وزاوية وجه $10\sqrt{2}\angle 45°$ V لها تردد مركب مرافق لها $s = -50 + j\,100\ s^{-1}$. أوجد الجهد عند الزمن $t = 10$ ms.

$$v(t) = 10\sqrt{2}e^{-50t}\cos(100t + 45°) \quad \text{(V)}$$

At $t = 10^{-2}$ s, $100t = 1$ rad $= 57.3°$, and so

$$v = 10\sqrt{2}e^{-0.5}\cos 102.3° = -1.83 \text{ V}$$

8-9 تحتوى شبكة فعالة على مقاومات وملف 70 mH ومكثف 25 μF . أوجد المعاوقة المناظرة فى مجال s بجهد غير منبع (أ) $\upsilon = 100 \sin (300t + 45°)$ (V) ، (ب) $\upsilon = 100e^{-100t} \cos 300t$ (V)

(أ) لا تعتمد المقاومة على التردد ولذلك فإنه عند S = j 300 rad/s . فإن معاوقة الملف تكون:

$$sL = (j300)(70 \times 10^{-3}) = j21$$

وتلك للمكثف تكون:

$$\frac{1}{sC} = -j133.3$$

(ب) عند $s = -100 + j\,300\ s^{-1}$.

$$sL = (-100 + j300)(70 \times 10^{-3}) = -7 + j21$$

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{(-100 + j300)(15 \times 10^{-6})} = -40 - j120$$

8-10 للدائرة المبينة شكل 20-8 أوجد الجهد υ عند t = 0.1 s لمنبع تيار (أ) $i = 10 \cos 2t$ (A) ، (ب) $i = 10e^{-t} \cos 2t$ (A) .

$$\mathbf{Z}_{in}(s) = 2 + \frac{2(s+2)}{s+4} = (4)\frac{s+3}{s+4}$$

(*a*) At $s = j2$ rad/s, $\mathbf{Z}_{in}(j2) = 3.22\underline{/7.13°}\ \Omega$. Then,

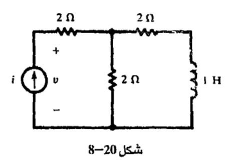
$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_{in} = (10\underline{/0°})(3.22\underline{/7.13°}) = 32.2\underline{/7.13°}\ \text{V} \qquad \text{or} \qquad \upsilon = 32.2 \cos(2t + 7.13°)\ \ (\text{V})$$

and $\upsilon(0.1) = 32.2 \cos(18.59°) = 30.5$ V.

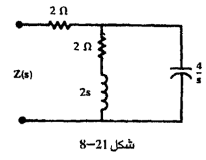
(*b*) At $s = -1 + j2\ \ s^{-1}$, $\mathbf{Z}_{in}(-1 + j2) = 3.14\underline{/11.31°}\ \Omega$. Then,

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_{in} = 31.4\underline{/11.31°}\ \text{V} \qquad \text{or} \qquad \upsilon = 31.4e^{-t} \cos(2t + 11.31°)\ \ (\text{V})$$

and $\upsilon(0.1) = 31.4e^{-0.1} \cos 22.77° = 26.2$ V.



شكل 8-20



شكل 8-21

8-11 أوجـد المعاوقـة Zin(s) للدائرة المبيـنة شكل 8-21 عند (أ) s = 0، (ب) S = J4 rad/s، (جـ) $|s| = \infty$.

$$Z_{in}(s) = 2 + \frac{2(s+1)\left(\frac{4}{s}\right)}{2(s+1) + \frac{4}{s}} = (2)\frac{s^2 + 3s + 4}{s^2 + s + 2}$$

(أ) $Z_{in}(0) = 4\ \Omega$ وهى معاوقة التى يلاقيها منبع ثابت للتيار المستمر فى الحالة المستقرة .

(ب)

$$Z_{in}(j4) = 2\frac{(j4)^2 + 3(j4) + 4}{(j4)^2 + j4 + 2} = 2.33\underline{/-29.05^\circ}\quad \Omega$$

وهى المعاوقة التى يلاقيها المنبع sin 4t أو cos 4t .

(جـ) $Z_{in}(\infty) = 2\ \Omega$ عند الترددات العالية جداً يعمل المكثف كما لو كان دائرة قصيرة على طرفى فرع RL .

8-12 عبر عن المعاوقة Z(s) لمجموعة التوازى المكونة من L = 4 H ، C = 1 F . عند أى ترددات s تكون هذه المعاوقة صفر أو ما لا نهاية؟

$$Z(s) = \frac{(4s)(1/s)}{4s + (1/s)} = \frac{s}{s^2 + 0.25}$$

بمجرد النظر $Z(0) = 0$ ، $Z(\infty) = 0$ والتى تتفق مع الفهم السابق لدائرة التوازى LC عند ترددات صفر (dc) وما لا نهاية . لقيم $|Z(s)| = \infty$.

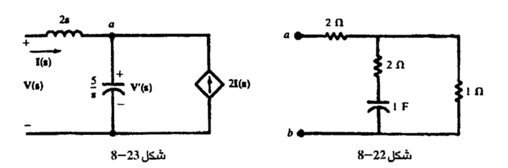
$$s^2 + 0.25 = 0 \qquad \text{or} \qquad s = \pm j0.5 \text{ rad/s}$$

ومنبع الجهـد الجيبى ذو التردد 0.5 rad/s ينتج عنه رنين دائرة التـوازى ومـعـاوقة تسـاوى مـا لا نهاية .

8-13 الدائرة المبينة شكل 8-22 بها منبع جهد متصل بالطرفين ab . والاستجابة لهذه الأثارة هو تيار الدخل . أوجد دالة الشبكة H(s) المناسبة .

$$H(s) = \frac{\text{response}}{\text{excitation}} = \frac{I(s)}{V(s)} \equiv \frac{1}{Z(s)}$$

$$Z(s) = 2 + \frac{(2 + 1/s)(1)}{2 + 1/s + 1} = \frac{8s + 3}{3s + 1} \qquad \text{from which} \qquad H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{3s + 1}{8s + 3}$$



شكل 8–23

شكل 8–22

8-14 أوجد H(s) للشبكة المبينة شكل 8-23 حيث تكون إثارتها هو التيار I(s) والاستجابة هو الجهد عند طرفى الدخل.

بتطبيق KCL عند الوصلة a :

$$I(s) + 2I(s) = \frac{s}{5} V'(s) \qquad \text{or} \qquad V'(s) = \frac{15}{s} I(s)$$

يعطى KVL عند طرفى الدخل.

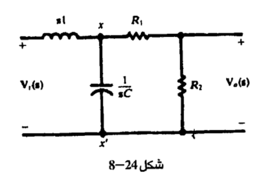
$$V(s) = 2sI(s) + V'(s) = \left(2s + \frac{15}{s}\right) I(s)$$

Then

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{2s^2 + 15}{s}$$

8-15 للشبكة ذات الدخلين المبينة شكل 8-24 أوجد قيم R_1 ، R_2 ، C إذا علم أن دالة جهد التحويل هى :

$$H_v(s) \equiv \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{0.2}{s^2 + 3s + 2}$$



شكل 8–24

المعاوقة ناظراً من إتجاه `xx هى :

$$Z' = \frac{(1/sC)(R_1 + R_2)}{(1/sC) + R_1 + R_2} = \frac{R_1 + R_2}{1 + (R_1 + R_2)Cs}$$

ومع تكرار تقسيمات الجهد :

$$\frac{V_o}{V_i} = \left(\frac{V_o}{V_{xx'}}\right)\left(\frac{V_{xx'}}{V_i}\right) = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\left(\frac{Z'}{Z' + s1}\right) = \frac{R_2/(R_1 + R_2)C}{s^2 + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}s + \frac{1}{C}}$$

وبمساواة المعاملات فى هذه العلاقة بتلك التى فى العلاقة الخاص بـ $H_V(s)$ نجد أن :

$$C = \frac{1}{2}\,F \qquad R_1 = \frac{3}{5}\,\Omega \qquad R_2 = \frac{1}{15}\,\Omega$$

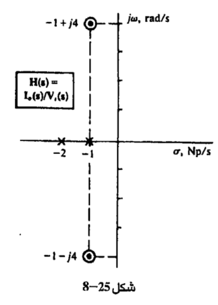
8-16 أوجد رسم القطب/ صفر لدالة المسامحة التحويلية .

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + 2s + 17}{s^2 + 3s + 2}$$

وبوصفها فى صورة معاملات :

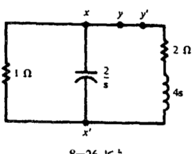
$$H(s) = \frac{(s + 1 + j4)(s + 1 - j4)}{(s + 1)(s + 2)}$$

تحدث الأقطاب عند 1-، 2- والأصفار عند 4 j ± 1- . انظر شكل 25-8 .



شكل 25–8

8-17 أوجد الترددات الطبيعية للشبكة المبينة بشكل 8-26 باستخدام منبع تيار لها فى مكان مناسب.



شكل 8-26

تكون الاستجابة لمنبع التيار المتصل عند `xx جهداً على نفس الطرفين لذلك تكون دالة الشبكة H(s) = V(s) / I(s) = Z(s) ومن ثم:

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2/s} + \frac{1}{2+4s} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{s^2+2.5s+1.5}{s+0.5}$$

Thus,

$$Z(s) = (2)\frac{s+0.5}{s^2+2.5s+1.5} = (2)\frac{s+0.5}{(s+1)(s+1.5)}$$

الترددات الطبيعية هي أقطاب دالة الشبكة S = -1.0 Np/s ، s = 1.5 Np/s .

8-18 أعد حل المسألة 8-17 باستخدام منبع جهد مناسب للشبكة.

يمكن فتح الموصل عند 'yy شكل 8-26 ووضع منبع جهد وبذلك H(s) = I(s) / V(s) = 1/Z(s) معاوقة الشبكة عند الطرفين `yy هى:

$$Z(s) = 2 + 4s + \frac{1(2/s)}{1+2/s} = (4)\frac{s^2+2.5s+1.5}{s+2}$$

Then,

$$H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{s+2}{s^2+2.5s+1.5}$$

المقام هنا للمعادلة السابقة هو نفسه الذى فى المسألة 8-17 بنفس الجذور والترددات الطبيعية.

8-19 منبع جيبى 5000 rad/s قيمته V = 100L0° V (فى الصورة الاتجاهية) طبق على الدائرة شكل 8-27 . أوجد قيمة معامل المقياس K_m وقيم العناصر التى تحدد التيار بالقيمة 89 mA (قيمة عظمى).

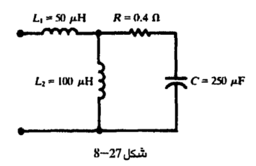
At $\omega = 5000$ rad/s,

$$\mathbf{Z}_{in} = j\omega L_1 + \frac{(j\omega L_2)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{j\omega L_2 + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$= j0.250 + \frac{(j0.500)(0.40 - j0.80)}{0.40 - j0.30} = 1.124\underline{/69.15^\circ} \quad \Omega$$

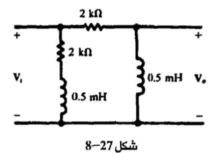
عند $|v| = 100$ v، $I = 100 / 1.124 = 89.0$ A لذلك لتحديد قيمة التيار إلى 89.0×10^{-3} A فإن المعاوقة يجب أن تزداد بالمعامل $K_m = 10^3$.

وبذلك تكون قيم عناصر المقياس كالتالى : $R = 10^3 (0.4) = 400\ \Omega$ ، $L_1 = 10^3(50\ \mu H) = 50$ mH ، $L_2 = 10^3 (100\ \mu H) = 100$ mH ، $C = (250\ \mu F) / 10^3 = 0.250\ \mu F$.



شكل 27–8

8-20 بالرجوع لشكل 28-8 أوجد $H(s) = V_0/V_i$ حينما $s = j4 \times 10^6$ rad/s أجعل مقياس الشبكة $K_m = 10^{-3}$ وقارن $H(s)$ للشبكتين :



شكل 27–8

At $\omega = 4 \times 10^6$ rad/s, $X_L = (4 \times 10^6)(0.5 \times 10^{-3}) = 2000\ \Omega$. Then,

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{j2000}{2000 + j2000} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{/45^\circ}$$

بعد عمل مقياس للقيم فإن الممانعة الحثية هى $2\ \Omega\ (2000\ \Omega)\ 10^{-3}$ والمقاومة تكون $(2\ k\Omega)\ 10^{-3}$ $= 2\ \Omega$ ولذلك :

$$H(s) = \frac{j2}{2 + j2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45°$$

وتبقى دالة تحويل الجهد بدون تغيير لمقياس قيمتها وبوجه عام فإن أى دالة تحويل بدون وحدات لا تتأثر بمقياس القيم أما دالة التحويل التى تحمل وحدات الأوم (Ω) فإنها تضرب فى المعامل K_m والدالة التى تشمل وحدات S فإنها تضرب فى $1/K_m$.

8-21 دائرة تحتوى على ثلاث عناصر على التوالى $R = 5\ \Omega$ ، $L = 4\ H$ ، $C = 3.91\ mF$ أوجد تردد رنين التوالى بوحدات rad/s ثم عامل الدائرة بمقياس تردد $K_f = 1000$. ارسم $|Z(\omega)|$ لكلا الدائرتين .

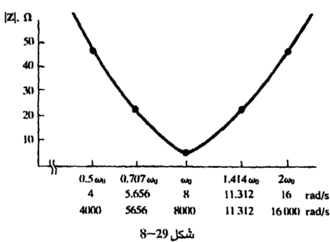
قبل المقياس

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 8\ \text{rad/s} \qquad \text{and} \qquad Z(\omega_0) = R = 5\ \Omega$$

بعد المقياس

$$R = 5\ \Omega \qquad L = \frac{4\ H}{1000} = 4\ \text{mH} \qquad C = \frac{3.91\ \text{mF}}{1000} = 3.91\ \mu F$$

$$\omega_0 = 1000(8\ \text{rad/s}) = 8000\ \text{rad/s} \qquad Z(\omega_0) = R = 5\ \Omega$$

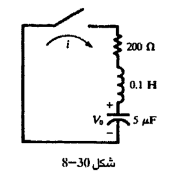


شكل 29–8

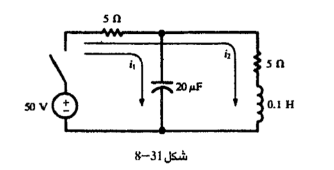
ولذلك بعمل مقياس للتردد بالمعامل 1000 ينتج عنه اعتبار المعاوقة 5 Ω عند التردد 8000 rad/s بدلاً من 8 rad/s . وأى قيمة أخرى للمعاوقة تعامل بنفس الطريقة باستخدام المقياس 1000 لقيمتها السابقة وبالتالى فإن الرسمين لقيم $|Z(\omega)|$ يختلفان فقط فى المقياس الأفقى . انظر شكل 29-8 (يكون نفس الشيئ صحيحاً للرسمين لقيم $\theta_{Z(\omega)}$).

مسائل إضافية

22-8 فى دائرة RLC المبينة شكل 30-8 كانت الشحنة الابتدائية على المكثف $V_0 = 200$ V .
أوجد التيار العابر بعد قفل المفتاح عند $t = 0$. الجواب : $-2e^{-1000t} \sin 1000t$ (A) .



شكل 30-8



شكل 31-8

23-8 دائرة توالى RLC بها $R = 200\ \Omega$ ، $L = 0.1$ H ، $C = 100\ \mu F$ بها منبع جهد 200 v وصل عند $t = 0$. أوجد التيار العابر باعتبار الشحنة الابتدائية على المكثف صفراً.

الجواب : $1.055\ (e^{-52t} - e^{-1948t})$ A .

24-8 ما هى قيمة المكثف الذى يوضح بدل المكثف 100 μF للمسألة 23-8 بحيث ينتج حالة الخمد المضبوط . الجواب : 10 μF .

25-8 أوجد تردد الرنين الطبيعى $|\beta|$ لدائرة توالى RLC بها $R = 200\ \Omega$ ، $L = 0.1$ H ، $C = 5\ \mu F$.

الجواب : 1000 rad/s .

26-8 سلط الجهد 10v عند الزمن $t = 0$ لدائرة توالى RLC بها $R = 5\ \Omega$ ، $L = 0.1$ H ، $C = 500\ \mu F$
أوجد الجهد العابر على طرفى المقاومة . الجواب : $3.60e^{-25t} \sin 139t$ (V) .

8-27 فى الدائرة ذات الشبيكتين المبينة شكل 8-31 أقفل المفتاح عند $t = 0$. أوجد i_1 ، i_2 لقيم $t > 0$.

الجواب : $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t}$ (A)،

$i_2 = -5.05e^{-100t} + 5.00 + 0.05e^{-9950t}$ (A) .

8-28 يمثل الجهـد فى مجـال s بالقيمة $100\underline{/30°}$ V . أوجـد دالة الزمن لكل من (أ) $s = -2$ Np/s، (ب) $s = -1 + j4\ s^{-1}$. الجواب : (أ) $86.6e^{-2t}$ (V)، (ب) $100e^{-t}\cos(5t + 30°)$ (V) .

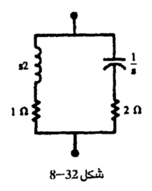
8-29 أوجـد الترددات المركبة المرافقة للتيار $i(t) = 5.0 + 10e^{-3t}\cos(50t + 90°)$ (A) . الجواب : $0, -3 \pm j\ 50\ s^{-1}$.

8-30 تيار إتجاهى $25\underline{/40°}$ A له تردد مركب $s = -2 + j3\ s^{-1}$. ما هى قيمة $i(t)$ عند الزمن $t = 0.2s$.

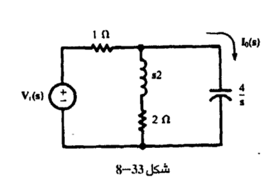
الجواب : 4.51 A .

8-31 أحـسـب المعاوقـة $Z(s)$ للدائـرة المبـينة شكل 8-32 عند (أ) $S = 0$، (ب) $S = j\ 1$ rad/s، (جـ) $S = j\ 2$ rad/s، (د) $|s| = \infty$.

الجواب : (أ) $1\ \Omega$، (ب) $1.58\ \underline{/18.43°}\ \Omega$، (جـ) $1.84\ \underline{/12.53°}\ \Omega$، (د) $2\ \Omega$.



شكل 8-32



شكل 8-33

8-32 لجهد المنبع فى مجال s للدائرة المبينة شكل 8-33 فى المجال الزمن بالعلاقة التالية :

$$v_i(t) = 10e^{-t}\cos 2t \quad (V)$$

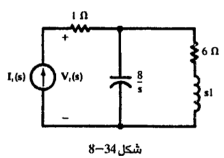
أوجد $i_0(t)$. الجواب : $7.07e^{-1}\cos(2t + 98.13°)$ (A) .

8-33 دائرة التوالى R، L، C فى مجال الزمن عليها الجهد v_i وجهود العناصر v_R ، v_L ، v_C . أوجد دوال تحويل الجهد (أ) $V_R(s) / V_i(s)$ ، (ب) $V_C(s) / V_i(s)$.

الجواب : $(a)\ \dfrac{Rs/L}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$; $(b)\ \dfrac{1/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$

8-34 أوجد دالة الشبكة H(s) للدائرة المبينة شكل 34-8 . الاستجابة هى الجهد $V_i(s)$. الجواب :

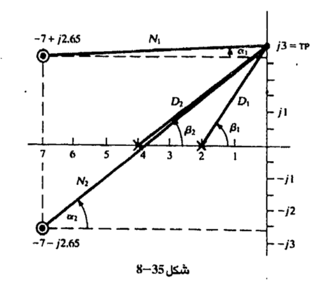
$$\frac{(s+7-j2.65)(s+7+j2.65)}{(s+2)(s+4)}$$



شكل 34-8

8-35 أوجد رسماً لمستوى s لدالة التحويل للمسألة 34-8 . ثم أوجد H(j3) من الرسم . الجواب : انظر شكل 35-8 .

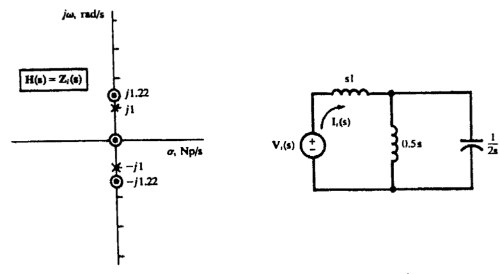
$$\frac{(7.02)(9.0)\underline{/2.86^\circ+38.91^\circ}}{(3.61)(5.0)\underline{/56.31^\circ+36.87^\circ}}=3.50\underline{/-51.41^\circ}\quad\Omega$$



شكل 35-8

8-36 أوجد $H(s) = V_C(s) / I_i(s)$ للدائرة المبـينة شكل 8-36 وارسم شكل قطب/ صـفـر للدالة.

الجواب: $H(s) = [s(s^2 + 1.5) / s^2 + 1)]$. انظر شكل 8-37



شكل 8−37

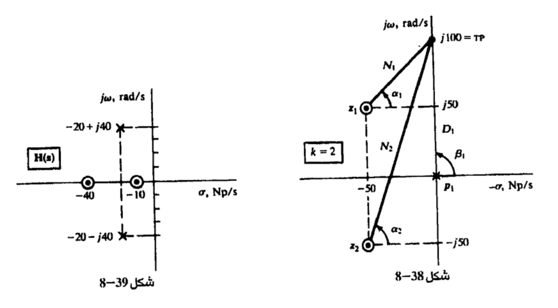
شكل 8−36

8-37 أكتب دالة التحويل $H(s)$ التى يكون لها رسم قطب/ صفر كما هو مبين شكل 8-38.

الجواب: $H(s) = k [(s^2 + 50s + 400) / (s^2 + 40s + 2000)]$.

8-38 تبين رسم قطب/ صفر فى شكل 8-39 قطبا عند $s = 0$ وأصـفـار عند $s = 50 \pm j\,50$. استـخدم الطريقة الهندسية لتحليل دالة التحويل عند نقطة اختبار $j\,100$.

الجواب: $H(j\,100) = 223.6 \angle 26.57^\circ$.



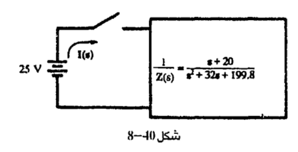
شكل 8−39

شكل 8−38

8-39 دائرة ذات فرعى توازى بها مقاومة $20\ \Omega$ فى أحد الأفرع ومجموعة توازى من $R = 10\ \Omega$ ، $L = 0.1\ H$ فى الفرع الآخر وصل أولاً منبع تيار $I_i(s)$. وأوجد التردد الطبيعى من مقام دالة الشبكة . جرب مع مواقع مختلفة عند استخدام منبع التيار . ثانياً باستخدام منبع جهد $V_i(s)$ وأحصل على التردد الطبيعي . الجواب : -300Np/s لجميع الحالات .

8-40 للشبكة المبينة شكل 8-40 أقفل المفتاح عند $t = 0$ ، عند $t = 0^+$. كان $i = 0$ ، $di/dt = 25$ A/S .

أوجد الترددات الطبيعية والتيار الكامل $i = i_n + i_f$. الجواب : -8.5 Np/s ، -23.5 Np/s ، $i = -2.25e^{-8.5t} - 0.25e^{-23.5t} + 2.5$.



شكل 8-40

8-41 دائرة توالى RLC تحتوى على $R = 1\ \Omega$ ، $L = 2\ H$ ، $C = 0.25\ F$ استخدم مقياس قيمة ومقياس تردد بالتتابع $K_m = 2000$ ، $K_f = 10^+$ ما هى مقاييس قيم العناصر ؛ الجواب : $12.5\ \mu F$ ، $0.4\ H$ ، $2000\ \Omega$.

8-42 تم توصيل جهد قيمته $V_1 = 25\ \angle 0\ V$ عند تردد معين ω_1 لشبكة غير فعالة ونتج عن ذلك التيار $I_1 = 3.85\ \angle -30°\ A$ وكان مقياس قيم العناصر باستخدام $K_m = 10$. أوجد التيار الذى ينشأ من منبع جهد آخر $V_2 = 10\ \angle 45°\ V$ بدلاً من الأول إذا كان تردد المنبع الثانى هو $\omega_2 = 10^3\ \omega_1$.

الجواب : $0.154\ \angle 15°\ A$.



الفصل التاسع

تحليل الدوائر الجيبية المستقرة

9-1 مقدمـــة

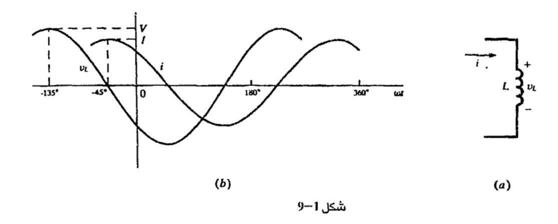
يركز هذا الفصل على الاستجابة المستقرة للدوائر التى تعمل بالمنابع الجيبية . حيث ستكون الاستجابة جيبية أيضاً . ففى الدوائر الخطية فإن افتراض وجود منبع جيبى لا يمثل تعارض حقيقى حيث أنه يمكن استبدال المنبع الذى يُمثل بدالة دورية بمجموعة متكافئة من الدوال الجيبية (متتالية فورير) وسنتعامل مع هذا الأمر فى الفصل السابع عشر .

9-2 استجابات العنصر

العلاقات بين الجهد والتيار لعنصر واحد مثل R ، L ، C درست فى الفصل الثانى واختصرت فى جدول 2-1 . وفى هذا الفصل فإن دوال كلاً من v ، i فتكون جيبية أو جيب تمام مع الإزاحة للزاوية ωt . وتكون ω تردد الزاوية وله واحدات rad/s وأيضاً $\omega = 2\pi f$ حيث f هى التردد بوحدات ذبذبة/ ثانية أو بشكل عام هيرتز (Hz) .

وإذا اعتبرنا عنصر حثى L مع التيار $i = I\cos(\omega t + 45°)$ A [انظر شكل 9-1(a)] فيكون التيار هو :

$$v_L = L\frac{di}{dt} = \omega LI[-\sin(\omega t + 45°)] = \omega LI\cos(\omega t + 135°)\ (V)$$



شكل 1−9

وبمقارنة منحنى v_L ، i نجد أن التيار تأخر عن الجهد بزاوية °90 أو $\pi/2$ ورسمت الدالتان فى شكل 9-1(b). نلاحظ أن دالة التيار i إلى اليمين من الجهد v وحيث أن مقياس الإتجاه الأفقى هو ωt فإن القيم إلى اليمين تكون فى زمن متأخر. وهذا يوضح أن i تتأخر عن v . ومقياس الإتجاه الأفقى هو بالزاويا نصف القطرية (الدائرية) ولكن نلاحظ أيضاً أنها يمكن أن تكون بالدرجات (135-، 180 . . وهكذا) ويمكن استخدام الوحدات المختلطة كما فى القيمة $\omega t + 45°$ وفى الحقيقة أن هذا التعبير رياضياً غير صحيح ولكنه مقبول عملياً فى تحليل الدوائر الكهربية. ويبين المحور الرأسى قيمتين مختلفتين وهما v ، i وبذلك لا بد من وجود مقياسان بدلاً من واحد.

وبدراسة الرسم فإنه من المفيد حالياً أن نقرر أن الدالة الجيبية تعرف تماماً حينما تعرف كلاً من القيمة العظمى (V أو I) والتردد (f أو ω) وزاوية الوجه (°45 أو °135).

ومبين فى جدول 1-9 استجابات العناصر الأساسية للدائرة عند مرور التيار $i = I\cos\omega t$ والجهد $v = V\cos\omega t$ وإذا رسمت هذه الاستجابات فإنها ستبين أنه فى حالة المقاومة R فإن R، v ، i لهم نفس زاوية الوجه. وللحث L، i تتأخر عن v بزاوية °90 أو $\pi/2$ rad . وللمكثف C فإن i تتقدم v بالزاوية °90 أو $\pi/2$ rad.

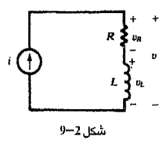
جـــدول 9-1

	$i = I\cos\omega t$	$v = V\cos\omega t$
i, v_R, R	$v_R = RI\cos\omega t$	$i_R = \frac{V}{R}\cos\omega t$
i, v_L, L	$v_L = \omega LI\cos(\omega t + 90°)$	$i_L = \frac{V}{\omega L}\cos(\omega t - 90°)$
i, v_C, C	$v_C = \frac{I}{\omega C}\cos(\omega t - 90°)$	$i_C = \omega CV\cos(\omega t + 90°)$

مثـــال 9-1 : دائرة توالى RL مبينة شكل 9-2 بها التيار $i = I\sin\omega t$. أوجد الجهد v على طرفى عنصريها وارسم كلاً من v ، i.

$$v_R = RI\sin\omega t \qquad v_L = L\frac{di}{dt} = \omega LI\sin(\omega t + 90°)$$

$$v = v_R + v_L = RI\sin\omega t + \omega LI\sin(\omega t + 90°)$$



شكل 9–2

حيث أن التيار دالة جيبية وأيضاً:

$$v = V\sin(\omega t + \theta) = V\sin\omega t\cos\theta + V\cos\omega t\sin\theta \qquad (1)$$

ومن السابق نحصل على :

$$v = RI \sin \omega t + \omega LI \sin \omega t \cos 90° + \omega LI \cos \omega t \sin 90° \qquad (2)$$

وبمساوات المعاملات للحدود المتشابهة فى (1) ، (2)

$$V \sin \theta = \omega LI \qquad \text{and} \qquad V \cos \theta = RI$$

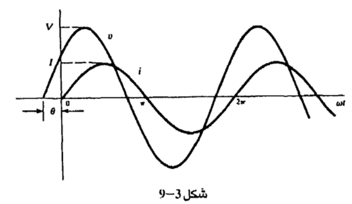
Then $$v = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin [\omega t + \arctan (\omega L/R)]$$

and $$V = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \qquad \text{and} \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

رسمت الدالتان لكل من i ، v فى شكل 3-9 وكانت زاوية الوجه θ وهى الزاوية التى يتأخر بها التيار i عن الجهد v وهى تقع فى المجال $0° \leq \theta \leq 90°$ بحيث تكون حدودها حينما $\omega L << R$ ، $\omega L >> R$ وإذا كان جهد الدائرة $v = V \sin \omega t$ فإن التيار الناتج سيكون :

$$i = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin (\omega t - \theta)$$

حيث كما سبق $\theta = \tan^{-1} (\omega L/R)$.



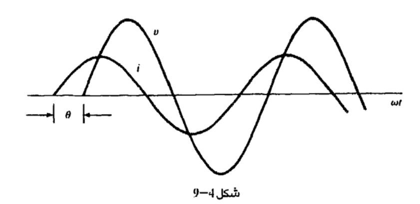
شكل 3-9

مثـــال 2-9 : إذا كان التيار فى دائرة توالى RC هو $i = I \sin \omega t$ فأوجد الجهد الكلى على طرفى العنصرين.

$$v_R = RI \sin \omega t \qquad v_C = (1/\omega C) \sin (\omega t - 90°)$$
$$v = v_R + v_C = V \sin (\omega t - \theta)$$

عندما $$V = I\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \qquad \text{and} \qquad \theta = \tan^{-1} (1/\omega CR)$$

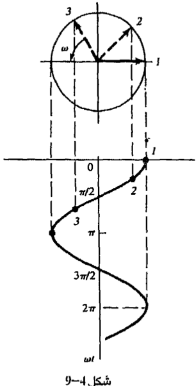
زاوية الوجه السالبة تزحزح v إلى اليمين بالنسبة للتيار i . وبالتالى فإن i يتقدم v لدائرة التوالى RC وتكون زاوية الوجه واقعة فى مجال $0 \leq \theta \leq 90°$. وعند $R >> (1/\omega C)$ فإن الزاوية $\theta = 0°$ وعند $R << (1/\omega C)$ فإن الزاوية $\theta = 90°$. انظر شكل 4-9.



شكل 4-9

9-3 / المتجهات

بنظرة سريعة للتغيرات الجيبية للجهد والتيار فى الأمثلة السابقة فإننا نجد أن القيمة العظمى واختلاف زوايا الوجه هما العاملين الهامين. وإذا اعتبرنا قيمة متحركة أو متجه كالمبين فى شكل 9-5 حيث تدور فى إتجاه عكس عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة ω (rad/s) يكون إسقاطه على المحور الأفقى ممثلاً لدالة جيب تمام. ويكون طول هذا المتجه أو قيمته هى القيمة العظمى لدالة جيب التمام. وتكون الزاوية بين وضعين مختلفين للمتجه هو الفرق فى زاوية الوجه لقيمتى دالة جيب التمام عند هذين الوضعين.



شكل 4-9

خلال هذا الكتاب ستُعرف المتجهات عن طريق دالة جيب تمام . وإذا عبر عن الجهد أو التيار بدالة الجيب فإنها ستتغير إلى دالة جيب تمام بطرح $90°$ من زاوية الوجه . اختبر المثالين فى جدول 2-9 ولاحظ أن المتجهات التى هى قطعة مستقيمة متجهة تمثل بحروف كبيرة وثقيلة وتكون زاوية الوجه لدالة جيب التمام هى الزاوية على المتجه . وأشكال المتجه وكل ما يتبعه يمكن قياسه من لحظة بداية حركة المتجه نفسه فى إتجاه دورانى عكس عقارب الساعة عند الزمن $t = 0$. والتردد f(Hz)، ω (rad/s) . غالباً لا تظهر ولكن يجب أخذها فى الاعتبار حيث أنها داخلة ضمن أى مسألة لدائرة جيبية مستقرة .

جدول 2-9

Function	Phasor Representation
$v = 150 \cos(500t + 45°)$ (V)	$\mathbf{V} = 150\angle 45°$ V (150 V, 45°)
$i = 3.0 \sin(2000t + 30°)$ (mA) $= 3.0 \cos(2000t - 60°)$ (mA)	$\mathbf{I} = 3.0\angle -60°$ mA (3 mA, −60°)

مثـــال 9-3 : مجموعة توالى بها $R = 10\ \Omega$ ، $L = 20\ mH$ بها التيار $i = 5.0 \cos(500t + 10°)$ (A) . أوجد الجهود v ، V والمتجه التيارى I وارسم شكل المتجهات .

باستخدام الطرق فى مثال 9-1 .

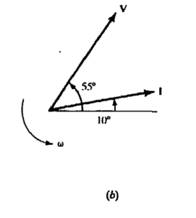
$$v_R = 50.0 \cos(500t + 10°) \qquad v_L = L\frac{di}{dt} = 50.0 \cos(500t + 100°)$$

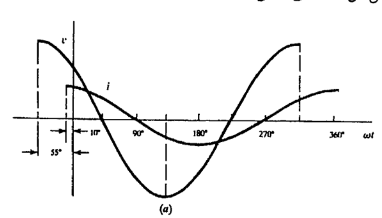
$$v = v_R + v_L = 70.7 \cos(500t + 55°)\ (V)$$

وتكون المتجهات المناظرة :

$$\mathbf{I} = 5.0\angle 10°\ A \qquad \text{and} \qquad \mathbf{V} = 70.7\angle 55°\ V$$

تظهر زاوية الوجه °45 فى شكل مجال الزمن لكل من i ، v فى شكل 9-6(a) وشكل المتجهات لكل من I ، V فى شكل 9-6(b) .





شكل 9–6

يمكن اعتبار المتجهات كقيم مركبة . فعند اعتبار المحور الأفقى محور القيم الحقيقية للمستوى المركب فإن المتجهات تصبح أعداد مركبة ويطبق عليها القوانين العادية . ومن متساويات أويلز فإنه يوجد ثلاث تعريفات مكافئة للمتجه .

الصورة القطبية $\mathbf{V} = V\angle\theta$.

الصورة المثلثية $\mathbf{V} = V(\cos\theta + j\sin\theta)$.

الصورة الأسية $\mathbf{V} = V\, w^{j\theta}$.

وصورة جيب التمام تكتب أيضاً هكذا :

$$v = V\cos(\omega t + \theta) = \text{Re}\,[Ve^{j(\omega t+\theta)}] = \text{Re}\,[\mathbf{V}e^{j\omega t}]$$

والصورة الأسية تقترح كيفية معالجة عمليات الضرب والقسمة كما يلى

ويمكن اقتراح شكل للتعبير الأسى للقيم المضروبة والمقسومة بما يلى :

$(V_1e^{j\theta_1})(V_2e^{j\theta_2}) + V_1V_2e^{j(\theta_1+\theta_2)}$,

$$V_1\underline{/\theta_1}(V_2\underline{/\theta_2}) = V_1V_2\underline{/\theta_1 + \theta_2}$$

and, since $(V_1e^{j\theta_1})/(V_2e^{j\theta_2}) = (V_1/V_2)e^{j(\theta_1-\theta_2)}$,

$$\frac{V_1\underline{/\theta_1}}{V_2\underline{/\theta}} = V_1/V_2\underline{/\theta_1 - \theta_2}$$

وتستخدم الصورة المثلثية المتعامدة عند جمع أو طرح المتجهات .

مثـــال 9-4 : إذا كـــان $V_1 = 25.0\ \underline{/143.13^\circ}$ ، $V_2 = 11.2\ \underline{/26.57^\circ}$ أوجـد النسبـة V_1/V_2 والمجموع $V_1 + V_2$.

$$\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2 = \frac{25.0\underline{/143.13^\circ}}{11.2\underline{/26.57^\circ}} = 2.23\underline{/116.56^\circ} = -1.00 + j1.99$$

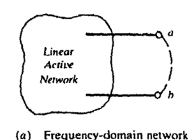
$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (-20.0 + j15.0) + (10.0 + j5.0) = -10.0 + j20.0 = 23.36\underline{/116.57^\circ}$$

9-4 المعاوقة والسماحية

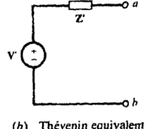
إذا وصلنا جهداً أو تياراً جيبياً لدائرة غير فعالة RLC فإنه سينشأ تجاوب جيبى . وباعتبار الدوال الزمنية مثل $v(t)$ ، $i(t)$ فإن الدائرة يقال عنها أنها فى مجال الزمن – شكل 9-7(a) – وحينما تحلل الدائرة باستخدام المتجهات فسيقال عنها أنها فى مجال التردد شكل 9-7(b) . ويمكن كتابة كلا من الجهد والتيار على الترتيب كما يلى .

$$v(t) = V\cos(\omega t + \theta) = \text{Re}\,[\mathbf{V}e^{j\omega t}] \qquad \text{and} \qquad \mathbf{V} = V\underline{/\theta}$$
$$i(t) = I\cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\,[\mathbf{I}e^{j\omega t}] \qquad \text{and} \qquad \mathbf{I} = I\underline{/\phi}$$

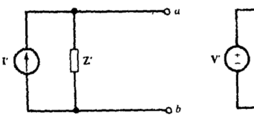
ويعبر عن النسبة بين متجه الجهد V ومتجه التيار I بالمعاوقة Z أى أن $Z = V/I$. ومقلوب المعاوقة يسمى السماحية Y وبالتالى فإن $Y = 1/Z(s)$ حيث $1\ S = 1\ \Omega^{-1} = 1$ mho . Y ، Z هى كميات مركبة .



(a) Frequency-domain network



(b) Thévenin equivalent



(c) Norton equivalent

شكل 15-9

مسائل محلولة

9-1 ملف 10 mH يمر به التيار i = 5.0 cos 2000 t (A) أوجد الجهد v_L .

From Table 9-1, $v_L = \omega L I \cos(\omega t + 90°) = 100 \cos(2000t + 90°)$ (V). As a sine function,

$$v_L = 100 \sin(2000t + 180°) = -100 \sin 2000t \quad \text{(V)}$$

9-2 دائرة توالى بها R = 10 Ω ، L = 20 mH يمر بها التيار i = 2.0 sin 500 t (A) أوجد الجهد الكلى v والزاوية التى بها التيار i يتأخر عن الجهد v .

بنفس طرق مثال 1-9 .

$$\theta = \arctan \frac{500(20 \times 10^{-3})}{10} = 45°$$

$$v = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \theta) = 28.3 \sin(500t + 45°) \quad \text{(V)}$$

ومنها يتضح أن التيار يتأخر عن الجهد v بالزاوية 45° .

9-3 أوجد عنصرى التوالى فى الدائرة إذا كان التيار والجهد الكلى هما :

$$i = 10 \cos(5000t - 23.13°) \quad \text{(A)} \qquad v = 50 \cos(5000t + 30°) \quad \text{(V)}$$

حيث أن i يتأخر عن v بالزاوية 53.13° فإن العنصرين هما R ، L وبالنسبة بين V_{max} ، I_{max} هى 50/10 . لذلك :

$$\frac{50}{10} = \sqrt{R^2 + (5000L)^2} \qquad \text{and} \qquad \tan 53.13° = 1.33 = \frac{5000L}{R}$$

وبالحل فإن R = 3.0 Ω ، L = 0.8 mH .

مجموعات المعاوقات

العلاقة $V = IZ$ (فى مجال التردد) هى من ناحية الشكل مطابقة لقانون أوم $\upsilon = iR$ لشبكة ذات مقاومة مادية (فى مجال الزمن). ولذلك يمكن تجميع المعاوقات تماماً كما فى حالة المقاومات.

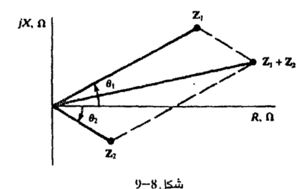
المعاوقات على التوالى $Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \ldots$.

المعاوقات على التوازى $(1/Z_{eq}) = (1/Z_1) + (1/Z_2) + \ldots$.

وبشكل خاص بالنسبة لمعاوقتين على التوازى $Z_{eq} = (Z_1Z_2) / (Z_1+Z_2)$.

مخطط المعاوقات

فى مخطط المعاوقات تمثل المعاوقة Z بنقطة فى النصف الأيمن من المستوى المركب. وشكل 8-9 يبين معاوقتين Z_1 فى الربع الأول والتى تشمل ممانعة حثية بينما Z_2 فى الربع الرابع وتشمل ممانعة سعوية ويمكن الحصول على جمعهما بالتوالى $Z_1 + Z_2$ بمتجه الجمع كما هو مبين. لاحظ أن المتجهات مبينة بدون رؤوس للأسهم من أجل التمييز بينها وبين المتجهات التى نحصل عليها من الأرقام المركبة.



شكل 8–9

مجموعات السماحيات

باستبدال Z بالقيمة 1/Y فى العلاقات السابقة فإن:

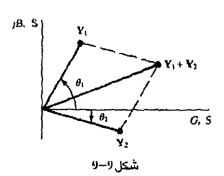
السماحيات على التوالى $(1/Y_{eq}) = (1/Y_1) + (1/Y_2) + \ldots$

السماحيات على التوازى $Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \ldots$

وبذلك تكون من الأسهل تمثيل دوائر التوالى بالمعاوقات ودوائر التوازى بدلالة السماحيات.

مخطط السماحية

شكل 9-9 يبين مخطط السماحية المناظر لمخطط المعاوقة 8-9 والشكل يبين سماحيتين Y_1 وتشمل مسامحة سعوية وسماحة Y_2 وتشمل مسامحة حثية بالإضافة إلى جمعهما الإتجاهى $Y_1 + Y_2$ وهى السماحية التوازى للسماحية Y_1 ، Y_2 .



شكل 9-9

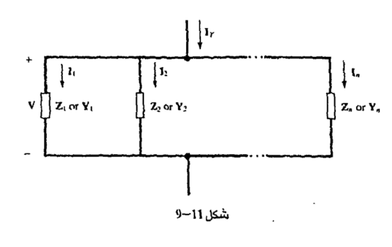
9-5 تقسيم الجهد والتيار فى مجال التردد

إذا نظرنا للتناظر بين المعاوقة فى مجال التردد والمقاومة فى مجال الزمن بند 6-3 وبند 7-3 نصل للنتائج التالية :

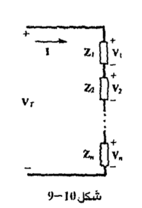
(1) المعاوقات على التوالى تقسم الجهد الكلى بنسبة يتم هذه المعاوقات

$$\frac{V_r}{V_s} = \frac{Z_r}{Z_s} \qquad \text{or} \qquad V_r = \frac{Z_r}{Z_{eq}} V_T$$

انظر شكل 10-9 .



شكل 11-9



شكل 10-9

(2) تقسم المعاوقات على التوازى (سماحيات على التوالى). تقسم التيار الكلى بنسبة عكسية لقيم هذه المعاوقات (بنسبة مباشرة لقيم السماحيات).

$$\frac{I_r}{I_s}=\frac{Z_s}{Z_r}=\frac{Y_r}{Y_s} \qquad \text{or} \qquad I_r=\frac{Z_{eq}}{Z_r}I_T=\frac{Y_r}{Y_{eq}}I_T$$

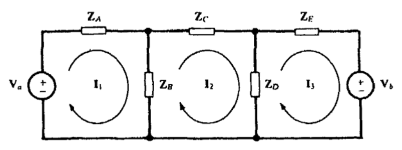
انظر شكل 9-11

9-6 طريقة تيار الشبيكة

إذا اعتبرنا الشبكة فى شكل 9-12 فى مجال التردد وبتطبيق KVL كما فى بند 4-3 أو بطريقة أبسط بمجرد النظر نحصل على معادلة المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

وذلك بالنسبة لتيارات الشبيكة المجهولة I_3 ، I_2 ، I_1 . وهنا $Z_{11}=Z_A+Z_B$ هى المعاوقة الذاتية للشبيكة 1 وهى مجموع جميع المعاوقات التى يمر بها I_1 . وبالمثل $Z_{22}=Z_B+Z_C+Z_D$ ، $Z_{33}=Z_D+Z_E$ هى المعاوقات الذاتية للشبيكات 3، 2 .



شكل 12−9

العنصر 1-2 لمصفوفة Z يعرف بالتالى (المعاوقات المشتركة بين I_1 ، I_2) $Z_{12}=\sum \pm$.

وتعتبر الإشارة الموجبة إذا مر كلا التياران فى نفس الإتجاه وتؤخذ الإشارة السالبة إذا كان أحدهما فى عكس إتجاه الآخر ويمكن استنتاج أيضاً أن $Z_{12}=Z_{21}$. فى شكل 9-12 يمر كلا من I_1، I_2 فى المعاوقة Z_B فى إتجاهين متضادين لذلك :

$$Z_{12}=Z_{21}=-Z_B$$

وبالمثل :

$Z_{13} = Z_{31} = \sum \pm$ (المعاوقات المشتركة بين I_1 ، I_3) = 0

$Z_{23} = Z_{32} = \sum \pm$ (المعاوقات المشتركة بين I_2 ، I_3) = $-Z_D$

مصفوفة المعاوقات Z تكون متماثلة .

فى عمود الجهد V فى الطرف الأيمن للمعادلة يمكن إدخال القيمة العامة V_k $(k = 1, 2, 3)$ تماماً كما عرفت فى بند 3-4 .

$V_k = \sum \pm$ (الجهد المؤثر فى الشبيكة k)

وتأخذ علامة التجميع الإشارة الموجبة إذا كان إتجاه الجهد فى إتجاه I_k وتأخذ الإشارة السالبة فى حالة العكس وبالنسبة للشبكة فى شكل 9-12 .

$$V_1 = +V_a \qquad V_2 = 0 \qquad V_3 = -V_b$$

بدلاً من استخدام الشبيكات للشبكة المرسومة على سطح معين فإنه فى بعض الأحيان يكون من اللائق اختيار مجموعة مناسبة من الحلقات تحتوى كلا منها على سبيكة بداخلها أو أكثر ومن السهل معرفة أن اثنين من تيارات الحلقات يمكن أن يكون لهما نفس الإتجاه فى أحد المعاوقات ولهما إتجاهين متضادين فى معاوقة أخرى . ومع هذا فإن القواعد السابقة لكتابة كلا من مصفوفة Z وعمود V وضعت بطريقة لتتناسب مع تطبيقها على الشبيكات أو الحلقات . وهذه القوانين بالطبع تتطابق مع تلك المستخدمة فى بند 3-4 لكتابة كلا من مصفوفة R وعمود V .

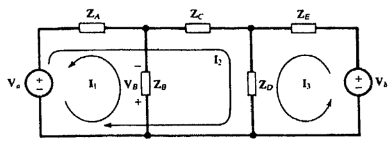
مثـــال 9-6 : أفرض أن الجهد الإتجاهى على طرفى المعاوقة Z_B لها قطبيه كما فى شكل 9-13 وباختيار شبيكات كما فى شكل 9-12 سيؤدى ذلك لحل كلاً من I_1 ، I_2 ثم الحصول على الجهد $V_B = (I_2 - I_1) / Z_B$. فى شكل 9-13 تم اختيار ثلاث حلقات (اثنان منها شبيكات) وذلك لجعل التيار I_1 هو التيار الوحيد فى Z_B بالإضافة إلى ذلك فإنه تم اختيار اتجاه I_1 حيث يكون $V_B = I_1 Z_B$. وبتكوين معادلة المصفوفة يكون :

$$\begin{bmatrix} Z_A + Z_B & -Z_A & 0 \\ -Z_A & Z_A + Z_C + Z_D & Z_D \\ 0 & Z_D & Z_D + Z_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_a \\ V_a \\ V_b \end{bmatrix}$$

ومنها

$$V_B = Z_B I_1 = \frac{Z_B}{\Delta_Z}\begin{vmatrix} -V_a & -Z_A & 0 \\ V_a & Z_A + Z_B + Z_C & Z_D \\ V_b & Z_D & Z_D + Z_E \end{vmatrix}$$

حيث Δ_Z المحدد لمصفوفة Z .



شكل 13-9

معاوقات الدخل والانتقال

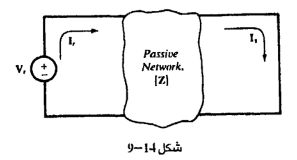
إن ترميز مقاومة الدخل (بند 5-4) ومقاومة الانتقال (بند 6-4) لهما نفس المدلول فى مجال التردد. ولذلك فإن للشبكة ذات المنبع الواحد شكل 14-9 تكون معاوقة الدخل :

$$Z_{input,r} \equiv \frac{V_r}{I_r} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rr}}$$

حيث Δ_{rr} هى العامل المشترك للمعاوقة Z_{rr} فى Δ_Z ومعاوقة الانتقال بين الشبيكة (أو الحلقة) r والشبيكة (أو الحلقة) s هى :

$$Z_{transfer,rs} \equiv \frac{V_r}{I_s} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rs}}$$

حيث Δ_{rs} هى العامل المشترك للمعاوقة Z_{rs} ، Δ_Z .



شكل 14-9

كما ذكر سابقاً فإن طريقة التراكب لعدد اختيارى n من الشبيكات أو من الحلقات فى الشبكة يمكن التعبير عنها كالتالى :

$$I_k = \frac{V_1}{Z_{transfer,1k}} + \cdots + \frac{V_{k-1}}{Z_{transfer,(k-1)k}} + \frac{V_k}{Z_{input,k}} + \frac{V_{k+1}}{Z_{transfer,(k+1)k}} + \cdots + \frac{V_n}{Z_{transfer,nk}}$$

9-7 طريقة جهد العقدة

بنفس الطريقة المتبعة فى بند 4-4 وباستخدام المسامحات بدلاً من معكوس المقاومات . وباعتبار شبكة فى مجال التردد لها n من العقد الرئيسية تعين أحداها بأن تكون عقدة المقارنة وذلك يتطلب n-1 معادلة جهد العقدة . وعلى ذلك فإنه حينما تكون n = 4 فإن معادلة المصفوفة ستكون :

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

وتكون المجاهيل V_1 ، V_2 ، V_3 وهى جهود العقد الرئيسية 3، 2، 1 بالنسبة للعقدة الرئيسية 4 وهى عقدة المقارنة .

Y_{11} هى المسامحة الذاتية للعقدة 1 والمعطاة بمجموع جميع المسامحات المتصلة بالعقدة 1- وبالمثل Y_{22} ، Y_{33} هما المسامحتان الذاتيتان للعقدتين 2 ، 3- .

Y_{12} هى السماحية الواصلة بين العقدتين 1 ، 2 وتعطى بالمجموع السالب لجميع المسامحات المتصلة بين العقدتين 1 ، ٢ ومنها نستنتج أن $Y_{12} = Y_{21}$ وبالمثل للمسامحات الواصلة الأخرى $Y_{13} = Y_{31}$ ، $Y_{23} = Y_{32}$ وبذلك تكون مصفوفة Y متماثلة وفى الطرف الأيمن للمعادلة يتكون عمود I تماماً كما فى بند ٤-٤ .

أى أن $I_k = \sum$ (التيار الداخل فى العقدة k) (k = 1, 2, 3)

ومنها نستنتج أن التيار الخارج من العقدة k يعتبر سالباً .

مسامحات الدخل الانتقال

معادلة المصفوفة بطريقة جهد العقدة هى :

$$[Y][V] = [I]$$

وهى مطابقة فى الشكل لمعادلة المصفوفة فى طريقة تيار الشبيكة .

$$[Z][I] = [V]$$

وبذلك يمكن اعتبار نظرياً على الأقل بأن مسامحتى الدخل والانتقال يمكن تعريفها بالتناظر مع مقاومتى الدخل والانتقال .

$$Y_{input,r} \equiv \frac{I_r}{V_r} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rr}}$$

$$Y_{transfer,rs} \equiv \frac{I_r}{V_s} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rs}}$$

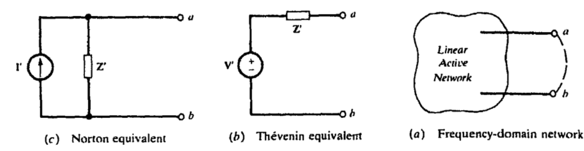
ويكون هنا العاملين المشتركين لكل من Y_{rr} ، Y_{rs} فى Δ_Y هما Δ_{rr} ، Δ_{rs} . وعملياً فإن استخدام هذه التعريفات محدود. وعلى الرغم من ذلك فإنه قد يكون مفيداً فى إيجاد العلاقات الخاصة بأساسيات التراكب (بالنسبة للجهود) .

$$V_k = \frac{I_1}{Y_{transfer,1k}} + \cdots + \frac{I_{k-1}}{Y_{transfer,(k-1)k}} + \frac{I_k}{Y_{input,k}} + \frac{I_{k+1}}{Y_{transfer,(k+1)k}} + \cdots + \frac{I_{n-1}}{Y_{transfer,(n-1)k}}$$

لقيم $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ وبتعبير لفظى فإن الجهد عند أى عقدة رئيسية (بالنسبة لعقدة المقارنة) يمكن الحصول عليه بجمع الجهود الواصلة لتلك العقدة عن طريق التيارات الداخلة إليها بشرط حدوث هذه التيارات فى نفس الوقت .

9-8 نظريتى ثيفينن ونورتن

وهذا مماثل تماماً لما جاء فى بند 9-4 باعتبار جهد الدائرة المفتوحة 'V وتيار الدائرة القصيرة 'I والدائرة الممثلة 'R لتحل محلها الجهد الإتجاهى للدائرة المفتوحة 'V والتيار الإتجاهى للدائرة القصيرة 'I والمعاوقة الممثلة 'Z . انظر شكل 15-9.



(c) Norton equivalent (b) Thévenin equivalent (a) Frequency-domain network

شكل 15–9

مسائل محلولة

9-1 ملف 10 mH يمر به التيار $i = 5.0 \cos 2000\,t$ (A) أوجد الجهد v_L .

From Table 9-1, $v_L = \omega LI \cos(\omega t + 90°) = 100 \cos(2000t + 90°)$ (V). As a sine function,

$$v_L = 100 \sin(2000t + 180°) = -100 \sin 2000t \quad \text{(V)}$$

9-2 دائرة توالى بها $R = 10\ \Omega$ ، $L = 20$ mH يمر بها التيار $i = 2.0 \sin 500\,t$ (A) أوجد الجهد الكلى v والزاوية التى بها التيار i يتأخر عن الجهد v .

بنفس طرق مثال 9-1 .

$$\theta = \arctan \frac{500(20 \times 10^{-3})}{10} = 45°$$

$$v = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \theta) = 28.3 \sin(500t + 45°) \quad \text{(V)}$$

ومنها يتضح أن التيار يتأخر عن الجهد v بالزاوية °45 .

9-3 أوجد عنصرى التوالى فى الدائرة إذا كان التيار والجهد الكلى هما :

$$i = 10 \cos(5000t - 23.13°) \quad \text{(A)} \qquad v = 50 \cos(5000t + 30°) \quad \text{(V)}$$

حيث أن i يتأخر عن v بالزاوية °53.13 فإن العنصرين هما R ، L وبالنسبة بين V_{max} ، I_{max} هى 50/10 . لذلك :

$$\frac{50}{10} = \sqrt{R^2 + (5000L)^2} \qquad \text{and} \qquad \tan 53.13° = 1.33 = \frac{5000L}{R}$$

وبالحل فإن $R = 3.0\ \Omega$ ، $L = 0.8$ mH .

9-4 دائرة توالى بها $R = 2.0\ \Omega$ ، $C = 200$ pF متصل بها جهد جيبى ذو التردد 99.47 MHz فإذا كان القيمة العظمى للجهد على طرفى المكثف 24 v ما هى القيمة العظمى على طرفى مجموعة التوالى .

$$\omega = 2\pi f = 6.25 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

من جدول 1-9 $I_{max} = \omega C V_{C,max} = 3.0$ A ومن ثم بالطريقة المذكورة فى مثال 2-9 .

$$V_{max} = I_{max}\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} = \sqrt{(6)^2 + (24)^2} = 24.74 \text{ V}$$

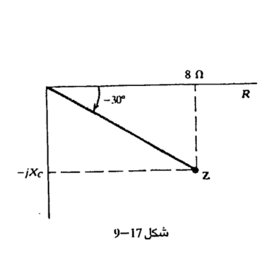
9-5 إذا كان التيار فى دائرة التوالى $R = 5\ \Omega$ ، $L = 30$ mH يتأخر عن الجهد والزاوية °80 . أوجد تردد المنبع والمعاوقة Z .

من مخطط المعاوقات شكل 16-9 .

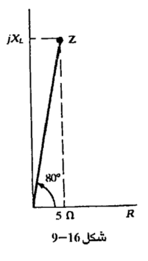
$$5 + jX_L = Z\angle 80^\circ \qquad X_L = 5 \tan 80^\circ = 28.4\ \Omega$$

وبالتالى فإن : $28.4 = \omega(30 \times 10^{-3})$, whence $\omega = 945.2$ rad/s and $f = 150.4$ Hz.

$$\mathbf{Z} = 5 + j28.4\ \Omega$$



شكل 17—9



شكل 16—9

9-6 عند أى تردد سيتقدم التيار الجهد بالزاوية °30 فى دائرة التوالى التى بها $R = 8\ \Omega$ ، $C = 30\ \mu$F .

من شكل متجهات المعاوقة 17-9 .

$$8 - jX_C = Z\angle{-30^\circ} \qquad -X_C = 8\tan(-30^\circ) = -4.62\ \Omega$$

Then $$4.62 = \frac{1}{2\pi f(30\times 10^{-6})} \qquad \text{or} \qquad f = 1149\ \text{Hz}$$

-9 دائرة توالى RC بها $R = 10\ \Omega$ وزاوية معاوقتها -45° عند التردد $f_1 = 500$ Hz أوجد التردد الذى يكون قيمة المعاوقة عنده (أ) ضعف القيمة عند f_1، (ب) نصف القيمة عند f_1 .

From $10 - jX_C = Z_1\angle{45^\circ}$, $X_C = 10\ \Omega$ and $Z_1 = 14.14\ \Omega$.

(أ) لتكون القيمة الضعف .

$$10 - jX_C = 28.28\angle{\theta^\circ} \qquad \text{or} \qquad X_C = \sqrt{(28.28)^2 - (10)^2} = 26.45\ \Omega$$

وحيث أن X_C تتناسب عكسياً مع f .

$$\frac{10}{26.45} = \frac{f_2}{500} \qquad \text{or} \qquad f_2 = 189\ \text{Hz}$$

(ب) القيمة Z_3 مستحيلة حيث أن أصغر قيمة ممكنة للمعاوقة Z هى حينما $Z = R = 10\ \Omega$.

9-8 دائرة بها عنصران على التوالى متصل بها الجهد $V = 240\angle{0^\circ}$ V والتيار $I = 50\angle{-60^\circ}$ A . أوجد التيار الناتج حينما تنخفض المقاومة إلى 30% و(ب) إلى 60% من قيمتها الأولى .

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{240\angle{0^\circ}}{50\angle{-60^\circ}} = 4.8\angle{60^\circ} = 2.40 + j4.16\quad \Omega$$

(أ) $$30\% \times 2.40 = 0.72 \qquad \mathbf{Z}_1 = 0.72 + j4.16 = 4.22\angle{80.2^\circ}\quad \Omega$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{240\angle{0^\circ}}{4.22\angle{80.2^\circ}} = 56.8\angle{-80.2^\circ}\quad \text{A}$$

(ب) $$60\% \times 2.40 = 1.44 \qquad \mathbf{Z}_2 = 1.44 + j4.16 = 4.40\angle{70.9^\circ}\quad \Omega$$

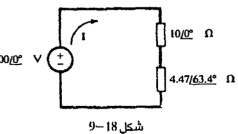
$$\mathbf{I}_2 = \frac{240\angle{0^\circ}}{4.40\angle{70.9^\circ}} = 54.5\angle{-70.9^\circ}\quad \text{A}$$

9-9 للدائرة المبينة شكل 9-18 أوجد Z_{eq} وأحسب التيار I .

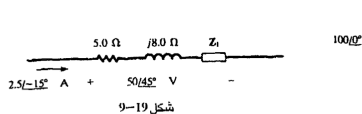
لمعاوقات التوالى :

$$\mathbf{Z}_{eq} = 10\angle{0^\circ} + 4.47\angle{63.4^\circ} = 12.0 + j4.0 = 12.65\angle{18.43^\circ}\quad \Omega$$

Then $$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{100\angle{0^\circ}}{12.65\angle{18.43^\circ}} = 7.91\angle{-18.43^\circ}\quad \text{A}$$



شكل 9−18



شكل 9−19

9-10 أوجد المعاوقة Z_1 فى الدائرة المبينة شكل 9-19.

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = 20\underline{/60^\circ} = 10.0 + j17.3 \quad \Omega$$

حيث أن معاوقات التوالى تجمع فإن :

$$5.0 + j8.0 + \mathbf{Z}_1 = 10.0 + j17.3 \qquad \text{or} \qquad \mathbf{Z}_1 = 5.0 + j9.3 \quad \Omega$$

9-11 أحســـب المعاوقـــة المكافئة Z_{eq} والمسـامحة المكافئة Y_{eq} للدائـــرة ذات الأربعـــة أفـــرع المبينة شكل 9-20.

باستخدام المسامحات :

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{j5} = -j0.20 \text{ S} \qquad \mathbf{Y}_3 = \frac{1}{15} = 0.067 \text{ S}$$

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{1}{5 + j8.66} = 0.05 - j0.087 \text{ S} \qquad \mathbf{Y}_4 = \frac{1}{-j10} = j0.10 \text{ S}$$

Then
$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4 = 0.117 - j0.187 = 0.221\underline{/-58.0^\circ} \quad \text{S}$$

and
$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{1}{\mathbf{Y}_{eq}} = 4.53\underline{/58.0^\circ} \quad \Omega$$

شكل 9−20

9-12 التيار الكلى الداخـل للدائرة المبـينة شـكل 9-20 هـو $33.0\,\underline{/-13.0^\circ}$ A أوجـد تيـار الفـرع I_3 والجهد V .

$$V = IZ_{eq} = (33.0\underline{/-13.0^\circ})(4.53\underline{/58.0^\circ}) = 149.5\underline{/45.0^\circ} \quad V$$

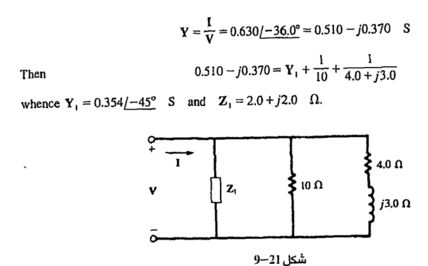
$$I_3 = VY_3 = (149.5\underline{/45.0^\circ})\left(\frac{1}{15}\underline{/0^\circ}\right) = 9.97\underline{/45.0^\circ} \quad A$$

9-13 أوجد Z_1 فى الشبكة ذات الثلاث أفرع فى شكل 9-21 إذا كـان $I = 31.5\,\underline{/24.0^\circ}$ A إذا كـان الجهد المستخدم $V = 50.0\,\underline{/60.0^\circ}$ V .

$$Y = \frac{I}{V} = 0.630\underline{/-36.0^\circ} = 0.510 - j0.370 \quad S$$

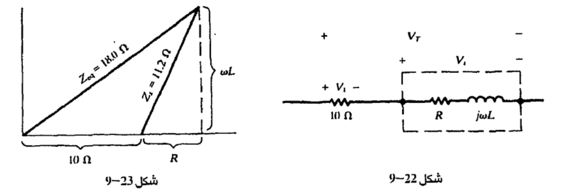
Then
$$0.510 - j0.370 = Y_1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{4.0 + j3.0}$$

whence $Y_1 = 0.354\underline{/-45^\circ}$ S and $Z_1 = 2.0 + j2.0\ \Omega$.



شكل 9-21

9-14 يمكن قياس ثوابت الملف R ، L بتوصيله على التوالى مع مقاومة معروفة وقياس كلا من V_x ، وجـهد المقاومة V_1 ، والجهـد الكلى V_T كـما فى شـكل 9-22 . ويجـب أيضاً معرفة التردد ولكن زاوية الوجه بين الجهود ليست معروفة . والقيم المعطاة هى $f = 60$ Hz ، $V_1 = 20$ V ، $V_x = 22.4$ V ، $V_T = 36.0$ V . أوجد R ، L .



شكل 9-23

شكل 9-22

قيم الجهود المقاسة هى القيم المؤثرة ولكن باعتبار حسابات المعوقات فإنه لا فرق بين الحسابات بالقيم المؤثرة أو بالقيم العظمى .

التيار (المؤثر) هو $I = V_1 / 10 = 2.0\ A$ ، ومن ثم :

$$Z_x = \frac{22.4}{2.0} = 11.2\,\Omega \qquad Z_{eq} = \frac{36.0}{2.0} = 18.0\,\Omega$$

من مخطط متجهات المعاوقات شكل 23-9 .

$$(18.0)^2 = (10 + R)^2 + (\omega L)^2$$
$$(11.2)^2 = R^2 + (\omega L)^2$$

حيث $\omega = 2\pi 60 = 337\ rad/s$. وتتابع الحل .

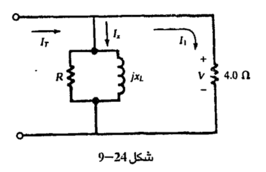
$$R = 4.92\,\Omega \qquad L = 26.7\ mH$$

15-9 فى دائرة التوازى المبينة شكل 24-9 كانت القيم المؤثرة للتيارات هى $I_1 = 15.0$ ، $I_x = 18.0\ A$ ، $I_T = 30.0\ A$ ، A أحسب R ، X_L .

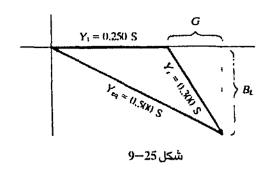
يمكن حل المسألة بطريقة مشابهة للمستعملة فى المسألة 14-9 ولكن باستخدام مخطط متجهات المسامحات .

الجهد المؤثر هو $V = I_1\,(4.0) = 60.0\ V$ لذلك :

$$Y_x = \frac{I_x}{V} = 0.300\ S \qquad Y_{eq} = \frac{I_T}{V} = 0.500\ S \qquad Y_1 = \frac{1}{4.0} = 0.250\ S$$



شكل 24-9



شكل 25-9

من مخطط متجهات المسامحات شكل 25-9 .

$$(0.500)^2 = (0.250 + G)^2 + B_L^2$$
$$(0.300)^2 = G^2 + B_L^2$$

which yield $G = 0.195$ S, $B_L = 0.228$ S. Then

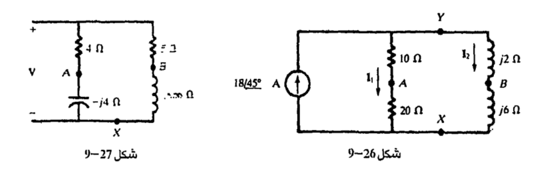
$$R = \frac{1}{G} = 5.13\ \Omega \qquad \text{and} \qquad jX_L = \frac{1}{-jB_L} = j4.39\ \Omega$$

i.e., $X_L = 4.39\ \Omega$.

9-16 أوجد متجه الجهد V_{AB} فى دائرة التوازى ذات الفرعين المبينة شكل 9-26 .

بطريقة تقسيم التيار $I_1 = 4.64\ \underline{/120.1^\circ}\ A$ ، $I_2 = 17.4\ \underline{/130.1^\circ}\ A$ يمكن أخذ أياً من المسارين AXB أو AYB وباختيار الأول .

$$V_{AB} = V_{AX} + V_{XB} = I_1(20) - I_2(j6) = 92.8\underline{/120.1^\circ} + 104.4\underline{/-59.9^\circ} = 11.6\underline{/-59.9^\circ}\ V$$



شكل 9-27 شكل 9-26

9-17 فى دائرة التوازى المبينة شكل 9-27 : $V_{AB} = 48.3\ \underline{/30^\circ}\ V$ أوجد جهد المنبع V .

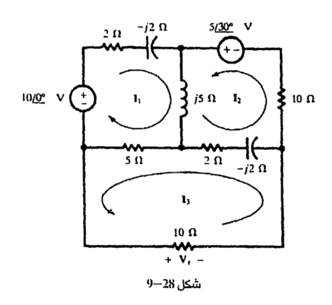
بتقسيم الجهد فى كلا الفرعين :

$$V_{AX} = \frac{-j4}{4 - j4} V = \frac{1}{1 + j} V \qquad V_{BX} = \frac{j8.66}{5 + j8.66} V$$

and so
$$V_{AB} = V_{AX} - V_{BX} = \left(\frac{1}{1 + j} - \frac{j8.66}{5 + j8.66}\right) V = \frac{1}{-0.268 - j1} V$$

9-18 أوجد الجهد V_x فى الشبكة المبينة شكل 9-28 باستخدام طريقة تيار الشبيكة .

or
$$V = (-0.268 + j1)V_{AB} = (1.035\underline{/105^\circ})(48.3\underline{/30^\circ}) = 50.0\underline{/135^\circ}\ V$$



شكل 28-9

مبين فى الشكل أحد الاختيارات لتيارات الشبيكة باعتبار I_3 يمر فى المقاومة 10 Ω فى إتجاه حيث يكون $V_x = I_3\,(10)$ (V) . ويمكن كتابة معادلة المصفوفة بمجرد النظر كما يلى :

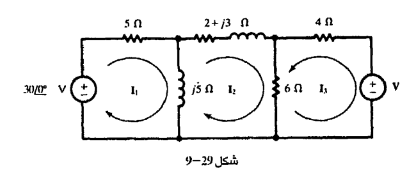
$$\begin{bmatrix} 7+j3 & j5 & 5 \\ j5 & 12+j3 & -(2-j2) \\ 5 & -(2-j2) & 17-j2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ 5\angle 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

والحل باستخدام المحددات :

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7+j3 & j5 & 10\angle 0^\circ \\ j5 & 12+j3 & 5\angle 30^\circ \\ 5 & -2+j2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7+j3 & j5 & 5 \\ j5 & 12+j3 & -2+j2 \\ 5 & -2+j2 & 17-j2 \end{vmatrix}} = \frac{667.96\angle -169.09^\circ}{1534.5\angle 25.06^\circ} = 0.435\angle -194.15^\circ \quad \text{A}$$

and $\mathbf{V}_x = \mathbf{I}_3(10) = 4.35\angle -194.15^\circ$ V.

9-19 فى الشبكة المبينة شـكل 29-9 أوجـد الجهـد V الذى ينشأ عنه تيـار يسـاوى صفراً فى المعاوقة 2 + j 3 Ω.



شكل 29–9

وباختيار تيارات الشبيكة كما هو مبين فى رسم الدائرة .

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{\Delta_z}\begin{vmatrix} 5+j5 & 30\underline{/0^\circ} & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & \mathbf{V} & 10 \end{vmatrix} = 0$$

ويفك محدد البسط بعوامله المساعدة للعمود الثانى .

$$-(30\underline{/0^\circ})\begin{vmatrix} -j5 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - \mathbf{V}\begin{vmatrix} 5+j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{whencc} \qquad \mathbf{V} = 35.4\underline{/45.0^\circ}\ \text{V}$$

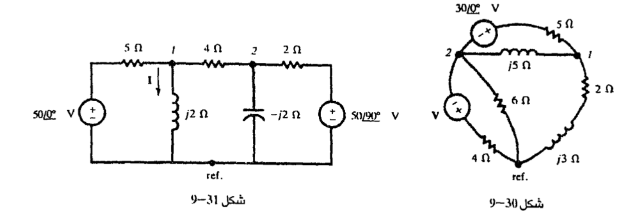
9-29 أعد حل المسألة 19-9 بطريقة جهد العقدة .

ترسم الشبكة مرة أخرى كما فى شكل 30-9 باعتبار أحد أطراف المعاوقة Ω 3 j + 2 كعقدة مقارنة . وباستخدام قوانين بند 7-9 فإن معادلة المصفوفة تكون :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}+\frac{1}{j5}+\frac{1}{2+j3} & -\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{j5}\right) \\ -\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{j5}\right) & \frac{1}{5}+\frac{1}{j5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30\underline{/0^\circ}}{5} \\ \frac{-30\underline{/0^\circ}}{5} - \frac{\mathbf{V}}{4} \end{bmatrix}$$

لكى يكون جهد العقدة V_1 صفراً فإنه يلزم أن يتلاشى بسط المحدد لقيمة V_1 .

$$N_1 = \begin{vmatrix} \frac{30\underline{/0^\circ}}{5} & -0.200+j0.200 \\ \frac{-30\underline{/0^\circ}}{5} - \frac{\mathbf{V}}{4} & 0.617-j0.200 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{from which} \qquad \mathbf{V} = 35.4\underline{/45^\circ}\ \text{V}$$



شكل 31–9

شكل 30–9

9-21 استخدم طريقة جهد العقدة للحصول على التيار I فى الشبكة المبينة شكل 31-9 .

يوجد ثلاث عقد رئيسية . فى الشبكة نختار منها عقدة مقارنة والعقدة رقم 1 اختيرت بحيث يكون جهد العقدة 1 هو الجهد على طرف الممانعة j 2-Ω .

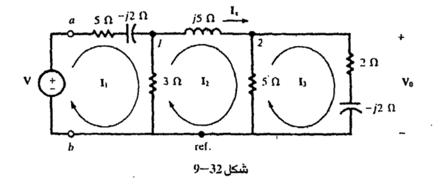
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}+\frac{1}{j2}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{-j2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{50\angle 0^\circ}{5} \\ \frac{50\angle 90^\circ}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_1=\frac{\begin{vmatrix} 10 & -0.250 \\ j25 & 0.750+j0.500 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.450-j0.500 & -0.250 \\ -0.250 & 0.750+j0.500 \end{vmatrix}}=\frac{13.52\angle 56.31^\circ}{0.546\angle -15.94^\circ}=24.76\angle 72.25^\circ \quad \text{V}$$

and

$$\mathbf{I}=\frac{24.76\angle 72.25^\circ}{2\angle 90^\circ}=12.38\angle -17.75^\circ \quad \text{A}$$

9-22 أوجد معاوقة الدخل عند الطرفين ab للشبكة المبينة شكل 32-9 .



شكل 32–9

باختيار تيار الشبيكة I_1 كما هو مبين فى الشكل فإن :

$$\mathbf{Z}_{\text{input},1} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8+j5 & -5 \\ -5 & 7-j2 \end{vmatrix}} = \frac{315.5\angle 16.19^\circ}{45.2\angle 24.86^\circ} = 6.98\angle -8.67^\circ \quad \Omega$$

9-23 فى الدائرة المبينة شكل 32-9 أوجـد تيار الملف I_2 بالحصول أولاً على معاوقـة الانتقـال بفرض أن $V = 10\angle 30^\circ$ V.

$$\mathbf{Z}_{\text{transfer},12} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{12}} = \frac{315.5\angle 16.19^\circ}{-\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 7-j2 \end{vmatrix}} = 14.45\angle 32.14^\circ \quad \Omega$$

Then
$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{\text{transfer},12}} = \frac{10\angle 30^\circ}{14.45\angle 32.14^\circ} = 0.692\angle -2.14^\circ \quad \text{A}$$

9-24 للشبكة المبينة شكل 32-9 أوجد قيمة جهد المنبع V الذى ينشأ عنه الجهد $V_0 = 5.0\angle 0^\circ$ V.

نستخدم معاوقة الانتقال لحساب قيمة التيار فى المعاوقة $2\text{-j}\ 2\ \Omega$ التى يمكن منهـا إيجـاد V_0 مباشرة.

$$\mathbf{Z}_{\text{transfer},13} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{13}} = \frac{315.5\angle 16.19^\circ}{15\angle 0^\circ} = 21.0\angle 16.19^\circ \quad \Omega$$

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{I}_1(2-j2) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{\text{transfer},13}}(2-j2) = \mathbf{V}(0.135\angle -61.19^\circ)$$

Thus, if $\mathbf{V}_0 = 5.0\angle 0^\circ$ V,

$$\mathbf{V} = \frac{5.0\angle 0^\circ}{0.135\angle -61.19^\circ} = 37.0\angle 61.19^\circ \quad \text{V}$$

طريقة أخرى :

يمكن استخدام طريقة جهد العقدة. فيكون V_0 هو جهد العقدة V_2 وذلك باختيار العقد المبينة فى شكل 32-9.

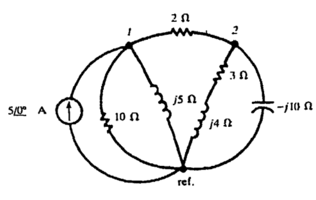
$$V_0 = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{5-j2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{j5} & \frac{V}{5-j2} \\ -\frac{1}{j5} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{5-j2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{j5} & -\frac{1}{j5} \\ -\frac{1}{j5} & \frac{1}{j5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2-j2} \end{vmatrix}} = V(0.134\underline{/-61.15^\circ})$$

عند $V_0 = 5.0\underline{/0^\circ}$ V $V = 37.3\underline{/61.15^\circ}$ V والتى تتفق مع الإجابة السابقة بتجاوزات طفيفة.

9-25 للشبكة المبينة فى شكل 33-9. أوجد مسامحة الدخل واستخدامها لحساب جهد العقدة V_1.

$$Y_{input,1} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{10}+\frac{1}{j5}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{3+j4}+\frac{1}{-j10} \end{vmatrix}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3+j4}+\frac{1}{-j10}} = 0.311\underline{/-49.97^\circ} \quad S$$

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{input,1}} = \frac{5.0\underline{/0^\circ}}{0.311\underline{/-49.97^\circ}} = 16.1\underline{/49.97^\circ} \quad V$$



شكل 33–9

9-26 لشبكة المسألة 25-9 أحسب مسامحة الانتقال $Y_{transfer,12}$. واستخدمها للحصول على جهد العقدة V_2.

$$Y_{transfer,12} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{12}} = \frac{0.194\underline{/-55.49^\circ}}{-(-0.50)} = 0.388\underline{/-55.49^\circ} \quad S$$

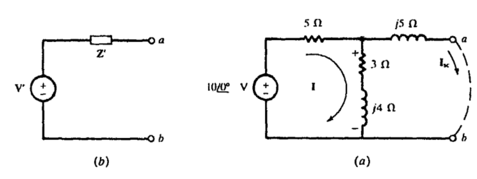
$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{transfer,12}} = 12.9\underline{/55.49^\circ} \quad V$$

9-27 استبدل الشبكة الفعالة فى شكل 9-34(a) على الطرفين ab بمكافىء ثفنين .

$$\mathbf{Z}' = j5 + \frac{5(3+j4)}{5+3+j4} = 2.50 + j6.25 \quad \Omega$$

جهد الدائرة المفتوحة 'V عند الطرفين ab هو الجهد على المعاوقة $3 + j\,4\ \Omega$.

$$\mathbf{V}' = \left(\frac{10\angle 0^\circ}{8+j4}\right)(3+j4) = 5.59\angle 26.56^\circ \quad \text{V}$$



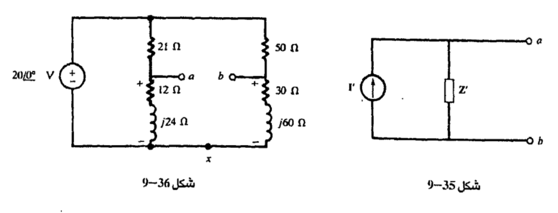
شكل 9-34

9-28 لشبكة المسألة 9-27 أوجد الدائرة المكافئة لنورتون شكل 9-35 .

على طرفى ab : I_{sc} هو تيار نورتون 'I وبتقسيم التيار :

$$\mathbf{I}' = \frac{10\angle 0^\circ}{5 + \dfrac{j5(3+j4)}{3+j9}}\left(\frac{3+j4}{3+j9}\right) = 0.830\angle -41.63^\circ \quad \text{A}$$

معاوقة التوازى 'Z هى كما وجدت فى المسألة 9-27 ، $Z' = 2.50 + j\,6.25\ \Omega$.



شكل 9-36

شكل 9-35

9-29 أوجد مكافىء ثفنين للدائرة الكبرى فى شكل 9-36 خذ 'V هو جهد النقطة a بالنسبة للنقطة b .

بتقسيم الجهد فى كل فرع :

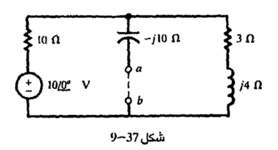
$$\mathbf{V}_{ax} = \frac{12+j24}{33+j24}(20\underline{/0^\circ}) \qquad \mathbf{V}_{bx} = \frac{30+j60}{80+j60}(20\underline{/0^\circ})$$

Hence $$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{ax} - \mathbf{V}_{bx} = (20\underline{/0^\circ})\left(\frac{12+j24}{33+j24} - \frac{30+j60}{80+j60}\right) = 0.326\underline{/169.4^\circ} \quad \text{V} = \mathbf{V}'$$

وإذا نظرنا للدائرة عند ab مع قصر جهد المنبع فإن الدائرة ستكون عبارة عن مجموعتين على التوازى كلا منها متصل على التوالى وبذلك :

$$\mathbf{Z}' = \frac{21(12+j24)}{33+j24} + \frac{50(30+j60)}{80+j60} = 47.35\underline{/26.81^\circ} \quad \Omega$$

9-30 استبدل الشبكة فى شكل 37-9 عند الطرفين ab بمكافئ نورتون مع مكفائ ثفنين .



شكل 37–9

بتقسيم التيار :

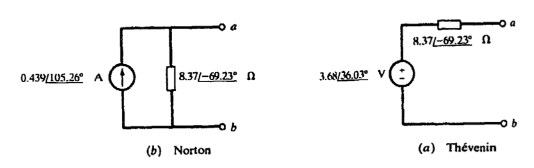
$$\mathbf{I}_{sc} = \mathbf{I}' = \left[\frac{10\underline{/0^\circ}}{10 + \frac{(-j10)(3+j4)}{3-j6}}\right]\left(\frac{3+j4}{3-j6}\right) = 0.439\underline{/105.26^\circ} \quad \text{A}$$

وبتقسيم الجهد فى الدائرة المفتوحة :

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}' = \frac{3+j4}{13+j4}(10\underline{/0^\circ}) = 3.68\underline{/36.03^\circ} \quad \text{V}$$

Then $$\mathbf{Z}' = \frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{I}'} = \frac{3.68\underline{/36.03^\circ}}{0.439\underline{/105.26^\circ}} = 8.37\underline{/-69.23^\circ} \quad \Omega$$

انظر شكل 38-9 .



شكل 9−38

مسائل إضافية

9-31 عنصران فى دائرة متصلان على التوالى بهما التيار والجهد الكلى

$\upsilon = 150 \sin (500t + 10°)$ (V) ، $i = 13.42 \sin (500t - 53.4°)$ (A) . عرف العنصرين.

الجواب: $R = 5\ \Omega$ ، $L = 20$ mH.

9-32 عنصران فى دائرة متصلان على التوالى بهما التيار والجهد الكلى

$\upsilon = 200 \sin (2000t + 50.0°)$ (V) ، $i = 40 \cos (2000t - 13.2°)$ (A) . عرف العنصرين.

الجواب: $R = -30\ \Omega$ ، $L = 125\ \mu F$.

9-33 دائـرة تـوالـى RC بهـا $R = 27.5\ \Omega$ ، $C = 66.7\ \mu F$ بهـا جهـود وتيار جيبى يتـردد زاويـة 1500 rad/s . أوجد زاوية الوجه التى يتقدم بها التيار الجهد. الجواب: 20°.

9-34 دائرة توالى RLC بها $R = 15\ \Omega$ ، $L = 80$ mH ، $C = 30\ \mu F$ يمر بها تيار جيبى بتردد زاوية 500 rad/s . أوجد زاوية الوجه وبين ما إذا كان التيار يتقدم أو يتأخر الجهد الكلى. الجواب: يتقدم 60.6°.

9-35 يتصل المكثف $C = 35\ \mu F$ على التوازى مع أحد العناصر. بين نوع هذا العنصر إذا كان الجهد الكلى والتيار هما:

$$\upsilon = 150 \sin 300t \text{ (V)} \quad , \quad i_T = 16.5 \sin (3000t + 72.4°) \text{ (A)}$$

الجواب: $R = 30.1\ \Omega$.

9-36 دائرة توالى من عنصرين بها $R = 20\ \Omega$ ، $L = 20$ mH ومعاوقتها $40.0\ \angle\theta\ \Omega$ أحسب الزاوية θ . والتردد . الجواب : 267 Hz ، 50°.

9-37 أوجد معاوقة التوالى RL بها $R = 25\ \Omega$ ، $L = 10$ mH عند (أ) 100 Hz ، (ب) 500 Hz ، (جـ) 1000 Hz . الجواب : (أ) $25.8\ \angle 14.1^\circ\ \Omega$ ، (ب) $40.1 \angle 51.5^\circ\ \Omega$ ، (جـ) $67.7\ \angle 68.3^\circ\ \Omega$.

9-38 أوجـد عنصـرى دائـرة التوالى إذا كان الجهد $\upsilon = 150 \sin (5000t + 45^\circ)$ (V) ينشأ عنه التيار $i = 3.0 \sin (5000t - 15^\circ)$ (A) . الجواب : 8.66 mH ، $25\ \Omega$.

9-39 دائرة توالى بها $R = 10\ \Omega$ ، $C = 40\ \mu F$ ، والجهد المستخدم $\upsilon = 500 \cos (2500t - 20^\circ)$ (V) . أوجد التيار الناتج.

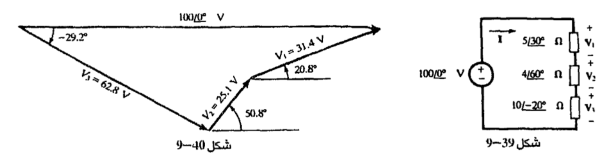
الجواب : $25\sqrt{2} \cos (2500t + 25^\circ)$ (A).

9-40 ثلاث معاوقات على التوالى هى $Z_1 = 3.0\ L45^\circ\ \Omega$ ، $Z_2 = 10\sqrt{2}\ L45^\circ\ \Omega$ ، $Z_3 = 5.0\ \angle -90^\circ\ \Omega$ أوجد الجهد المستخدم V إذا كان الجهد على طرفى Z_1 هو $27.0\ L{-10}^\circ$ V .

الجواب : $126.5\ \angle -24.5^\circ$ V.

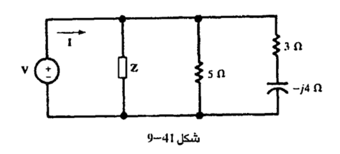
9-41 للثلاث عناصر المتصلة على التوالى شكل 9-39 (أ) أوجد التيار I ، (ب) أوجد الجهد على طرفى كل مقاومة وارسم مخطط المتجهات للجهد الذى يبين أن $V_1 + V_2 + V_3 = 100\ \angle 0^\circ$ V .

الجواب : (أ) $6.28\ \angle -9.17^\circ$ A ، (ب) انظر شكل 9-40.



شكل 9-40 شكل 9-39

9-42 أوجـد قيـمة المعاوقـة Z فى دائرة الـتوازى المبينة شكل 9-41 إذا كان $V = 50.0\ L30.0^\circ$ (V) ، $I = 27.9\ \angle 57.8^\circ$ (A) . الجواب : $5.5\ \angle -30^\circ\ \Omega$.



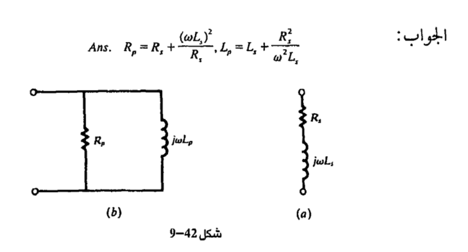
شكل 41—9

9-43 أوجد المواصلة والمسامحة الناتجة عن الجهد $V = 85.0 \angle 205^\circ$ (V) والتيار $I = 41.21 \angle -141.0^\circ$ (A) . الجواب: مكثف (سعوى) 0.47/s, 0.117 s .

9-44 ملف عملى يحتوى على كلا من المقاومة المادية والمعاوقة الحثية ويمكن تمثيله إما بدائرة توالى أو بدائرة توازى كما هو مبين شكل 42-9 أوجد كلا من R_p ، L_p بدلالة R_s ، L_s .

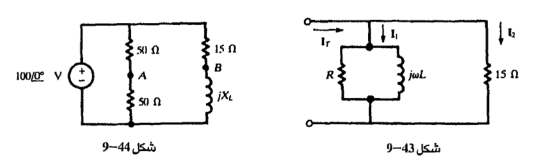
الجواب:

$$Ans.\quad R_p = R_s + \frac{(\omega L_s)^2}{R_s},\ L_p = L_s + \frac{R_s^2}{\omega^2 L_s}$$



شكل 42—9

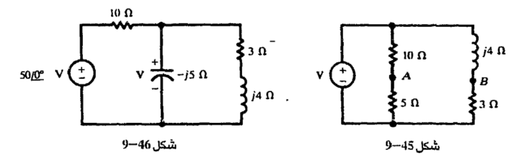
9-455 فى الشبكة المبينة شكل 43-9 كانت قيمة التيارات $I_T = 29.9$ A ، $I_1 = 22.3$ A ، $I_2 = 8.0$ A والتردد 60-Hz . أوجد عنصرى الدائرة R ، L . الجواب: 38.5 mH ، 5.8 Ω .



شكل 44—9 شكل 43—9

9-46 أوجد قيمة الجهد V_{AB} فى فرعى التوازى للشبكة المرسومة شكل 9-44 إذا كان X_L (أ) $5\ \Omega$، (ب) $15\ \Omega$، (جـ) $0\ \Omega$. الجواب : 50 V لأى قيمة لـ X_L.

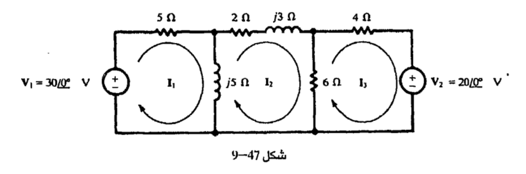
9-47 فى الشبكة التى فى شكل 9-45 $V_{AB} = 36.1\ L3.18°\ V$. أوجد جهد المنبع V . الجواب : $75\ L90°\ V$.



شكل 9—46 شكل 9—45

9-48 للشبكة التى فى شكل 9-46 حدد مجموعتين مختلفتين من تيارات الشبيكة وبين أن لكل منها $\Delta_Z = 55.9\ L\text{-}26.57°\ \Omega^2$ ولكل اختيار أحسب جهد المتجه V وأوجد جهد المتجه على طرفى المعاوقة $3 + j\ 4\ \Omega$ وقارن بالجهد V . الجواب : $V = V_{3+j4} = 22.36\ L\text{-}10.30°\ V$.

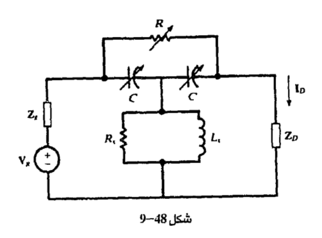
9-49 للشبكة المبينة شكل 9-47 استخدم طريقة تيار الشبيكة لإيجاد التيار فى المعاوقة $2 + j\ 3\ \Omega$ لكل من منبع الجهد V_1 ، V_2 . الجواب : $1.36\ L141.45°\ A$ ، $2.41\ L6.45°\ A$.



شكل 9—47

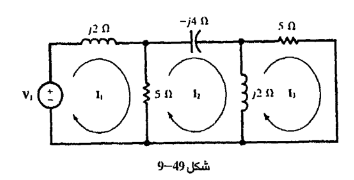
9-50 فى الشبكة المبينة شكل 9-48 ضبطت قيم كلا من المكثفين المتساويين C ، ومقاومة التوازى R حتى أصبح تيار المبين I_D للقيمة صفر . وباعتبار تردد الزاوية للمنبع ω أوجد قيم كلا من R_x ، L_x .

الجواب : $L_x = 1/(2\omega C)$, $R_Z = 1/(\omega^2 C^2 R)$.



شكل 9–48

9-51 للشبكة التى فى شكل 9-49 أوجد نسبة التيار I_1/I_2 . الجواب : $3.3 \angle -90^\circ$.



شكل 9–49

9-52 للشبكة التى فى شكل 9-49 .

أوجد $Z_{input,1}$ ، $Z_{input,13}$ ، بين أن $Z_{transfer,13} = Z_{transfer,31}$.

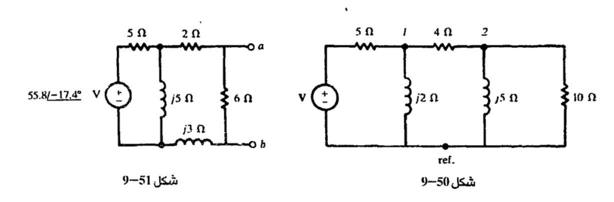
الجواب : $4\text{-}31\ L\text{-}68.2^\circ\ \Omega$ ، $1.31\ L21.8^\circ\ \Omega$.

9-53 للشبكة المبينة شكل 9-50 . أوجد النسبة بين V_1/V_2 . وذلك بتطبيق طريقة جهد العقدة .

الجواب : $(\Delta_{11}/\Delta_{12}) = 1.61\ L\text{-}29.8^\circ$.

9-54 للشبكة المبينة شكل 9-50 . أوجد المعاوقة المكافئة عند النقطة $Z_{input,1}$. الجواب :

$5.59 \angle 17.35^\circ\ \Omega$.



شكل 9—51

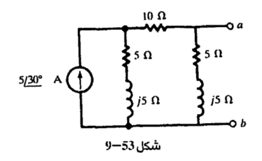
شكل 9—50

9-55 أوجد الدائرة المكافئة لكلا من ثفنين ونورتون عند الطرفين ab للشبكة المبينة بشكل 51-9 . اختيار الإشارات بحيث تكون $V' = V_{ab}$.

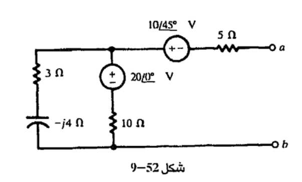
الجواب : $V' = 20.0 \angle 0° \ V$, $I' = 5.56 \angle -23.05° \ A$, $Z' = 3.60 \angle 23.06° \ \Omega$.

9-56 أوجد الدائرة المكافئة لثفنين ونورتون عند الطرفين ab للشبكة المبينة (شكل 52-9) .

الجواب : $V' = 11.5 \angle -95.8° \ V$, I' $1.39 \angle -80.6° \ A$, $Z' = 8.26 \angle -15.2° \ \Omega$.



شكل 9—53



شكل 9—52

9-57 أوجـد الدائرة المكافـئـة لكل من ثفنين ونورتون عند الطرفين ab للشـبـكة المبينة شكل 53-9 .

الجواب : $V' = 11.18 \angle 93.43° \ V$, $I' = 2.24 \angle 56.56° \ A$, $Z' = 5.0 \angle 36.87° \ \Omega$.

ملحق A

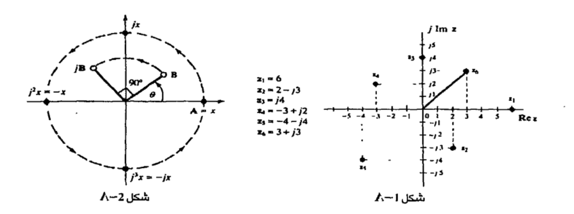
نظام الأعداد المركبة

A1 الأعداد المركبة

العدد المركب z هو عدد فى صورة $x + jy$ حيث x ، y هى أعداد حقيقية ، $j = \sqrt{-1}$. ونكتب $x = \mathrm{Re}\, z$ وهى الجزء الحقيقى للعدد z ، $y = \mathrm{Im}\, z$ وهى الجزء التخيلى للعدد z . و إذا كانت الأجزاء الحقيقية متساوية والأجزاء التخيلية متساوية لعدادان كان العدادان متساويان .

A2 المستوى المركب

لزوج من المحاور المتعامدة بحيث يمثل المحور الأفقى Re z والمحور الرأسى j Im z يحددان المستوى المركب الذى فيه كل عدد مركب تمثله نقطة واحدة وبالرجوع لشكل A-1 والذى فيه نبين ستة أعداد مركبة يبدو منه أن كل عدد مركب يمثله متجه خاص به من نقطة الأصل فى المستوى المركب كما هو مبين للعدد المركب z_6 فى شكل A-1 .



شكل A-2 شكل A-1

A3 المعامل المتجه j

بالإضافة لتعريف j المذكور فى بند A1 يمكن النظر إليه كمعامل يعمل على إدارة (لف) أى عدد مركب (متجه) A بالزاوية 90° فى إتجاه عكس عقارب الساعة وفى حالة كون A كمية حقيقية خالصة ، مثل x المبينة فى شكل A-2 فإن دوران A يحولها إلى jx على المحور الموجب التخيلى وبالاستمرار فى ذلك فإن j^2 يتقدم عن A 180° ، j^3 270° وj^4 360° . مبين أيضاً فى شكل A-2 العدد المركب B فى الربع الأول ويصنع الزاوية θ . لاحظ أن jB فى الربع الثانى عند الزاوية $\theta + 90°$.

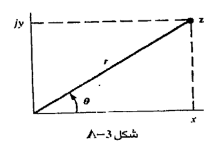
A4 التمثيلات الأخرى للأعداد المركبة

عرفت الأعداد المركبة بند A1 بشكلى الإحداثيات . وفى شكل A-3 $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$

والعدد المركب x يمكن كتابته فى الشكل المثلثى كالتالى :

$$\mathbf{z} = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

حيث r هى الرقمي الحسابى أو القيمة المطلقة (والتعبير $r = |z|$ هو المستعمل الشائع) بحيث أن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، الزاوية $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ وهى زاوية العدد z .



شكل A-3

تسمح علاقة أويلر بتمثيل آخر للعدد المركب يسمى الشكل الأسى .

$$\mathbf{z} = r\cos\theta + jr\sin\theta = re^{j\theta}$$

وشكل آخر شائع الاستعمال فى تحليل الدوائر هو شكل ستاينمتر القطبى $z = r\underline{/\theta}$ حيث θ بالدرجات .

A5 جمع وطرح الأعداد المركبة

لجمع عددين مركبين فإننا نجمع الأجزاء الحقيقية معا والأجزاء المركبة معا وفى الطرح كذلك نطرح الأجزاء الحقيقية معا ونطرح الأجزاء التخيلية معا ومن وجهة النظر العملية فإننا نقوم بعملية الجمع والطرح بطريقة أسهل، حينما يكون كلا العددان فى شكل الإحداثيات .

مثـــال A.1 : إذا كان $z_1 = 5 - j2$ ، $z_2 = -3 - j8$.

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = (5 - 3) + j(-2 - 8) = 2 - j10$$

$$\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 = (-3 - 5) + j(-8 + 2) = -8 - j6$$

A6 ضرب الأعداد المركبة

نضرب عددين مركبين حينما يكون كلاهما فى الشكل الأسى ويكون الناتج مباشرة من قوانين الأس .

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

وحاصل ضرب ستاينمتر القطبى مستنتج من الشكل القطبى .

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (r_1\underline{/\theta_1})(r_2\underline{/\theta_2}) = r_1 r_2\underline{/\theta_1 + \theta_2}$$

وحاصل الضرب بالطريقة المثلثية يمكن التعامل معه كأعداد مركبة ذات حدين .

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)$$

مثـــال A.2 : If $\mathbf{z}_1 = 5e^{j\pi/3}$ and $\mathbf{z}_2 = 2e^{-j\pi/6}$, then $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$.

مثـــال A.3 : If $\mathbf{z}_1 = 2\underline{/30^\circ}$ and $\mathbf{z}_2 = 5\underline{/-45^\circ}$, then $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (2\underline{/30^\circ})(5\underline{/-45^\circ}) = 10\underline{/-15^\circ}$.

مثـــال A.4 : If $\mathbf{z}_1 = 2 + j3$ and $\mathbf{z}_2 = -1 - j3$, then $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (2 + j3)(-1 - j3) = 7 - j9$.

A7 قسمة الأعداد المركبة

خارج قسمة عددين مركبين فى الشكل الأسى يستنتج مباشرة من قوانين الأس .

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}} = \frac{r_1e^{j\theta_1}}{r_2e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

ومرة أخرى فإن الشكل القطبى لستاينمتر فى القسمة يستنتج من الشكل الأسى .

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1\underline{/\theta_1}}{r_2\underline{/\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\underline{/\theta_1 - \theta_2}$$

وقسمة عددا مركبان فى الشكل الإحداثى يكون بضرب كلا البسط والمقام بمرافق المقام (انظر بند A8).

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}\left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2}\right) = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثـــال A.5 : إذا كان Given $\mathbf{z}_1 = 4e^{j\pi/3}$ and $\mathbf{z}_2 = 2e^{j\pi/6}$,

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$$

مثـــال A.6 : إذا كان Given $\mathbf{z}_1 = 8\underline{/-30^\circ}$ and $\mathbf{z}_2 = 2\underline{/-60^\circ}$,

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{8\underline{/-30^\circ}}{2\underline{/-60^\circ}} = 4\underline{/30^\circ}$$

مثـــال A.7 : إذا كان Given $\mathbf{z}_1 = 4 - j5$ and $\mathbf{z}_2 = 1 + j2$,

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{4 - j5}{1 + j2}\left(\frac{1 - j2}{1 - j2}\right) = -\frac{6}{5} - j\frac{13}{5}$$

A8 مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = x + jy$ هو العدد المركب $z^* = x - jy$ وبالتالى فإن :

$$\text{Re}\,\mathbf{z} = \frac{\mathbf{z} + \mathbf{z}^*}{2} \qquad \text{Im}\,\mathbf{z} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}^*}{2j} \qquad |\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z}\mathbf{z}^*}$$

فى المستوى المركب النقط z ، *z هى كصورة مرآة لإتجاه محور القيم الحقيقية

فى الشكل الأسى : $z = re^{j\theta}$ ، $z^* = re^{-j\theta}$.

فى الشكل القطبى : $z = r\angle\theta$ ، $z^* = r\angle-\theta$.

فى الشكل المثلثى : $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ ، $z^* = r(\cos\theta - j\sin\theta)$.

(i) $(z^*)^* = z$

(ii) $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$

(iii) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

(iv) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

ملحق B

المصفوفات والمحددات

B1 المعادلات الآنية ومصفوفات الخواص

توصف كثير من النظم الهندسية بمجموعة من المعادلات الآتية الغير مطلقة من الدرجة الأولى ذات الشكل .

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

حيث x_j هى المتغيرات الغير مطلقة y_j هى المتغيرات المطلقة ، a_{ij} هى معاملات المتغيرات الغير مطلقة. والمعاملات a_{ij} يمكن أن تكون مقادير ثابتة أو دوال المتغير آخر .

ويمكن الحصول على شكل أفضل لهذه المعادلات بالتعبير عنها بشكل المصفوفة .

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

أو $Y = AX$ مع تعريف خاص لحاصل الضرب AX (انظر بند B3) والمصفوفة $A = [a_{ij}]$ تسمى مصفوفة الخواص للنظام ورتبتها أو مقياسها يعرف بالتالى :

$$d(A) \equiv m \times n$$

حيث m هى عدد الصفوف بينما n هى عدد الأعمدة .

B2 أنــواع المصفوفـات

مصفوفة الصف : تسـمى بهـذا الاسـم المصفوفة التى لها أي عدد م الأعمدة ولكنها صف واحد $d(A) = 1 \times n$ وتسمى أيضا متجه الصف .

مصفوفة العمود : وتسمى بهذا الاسم المصفوفة التى لها أى عدد من الصفوف ولكنها عمو واحد $d(A) = m \times 1$ وتسمى أيضاً متجه العمود .

المصفوفة القطرية : وهى التى تكون جميع حدودها القطرية لها قيمة غير صفرية .

مصفوفة الوحدة : هى مصفوفة قطرية فيها عناصر كل قطر هو الوحدة .

المصفوفة الصفرية : وهى التى بها جميع العناصر صفرا .

المصفوفة المربعة: وهى التى بها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة. $d(A) = n \times n$

المصفوفة المتماثلة: والتى تكون على شكل

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad d(A) = m \times n$$

ومعكوس المصفوفة A هو:

$$A^T \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad d(A^T) = n \times m$$

حيث سنعرف المصفوفة A هى أعمدة المصفوفة A^T والعكس بالعكس. والمصفوفة A تكون متماثلة إذا كان $A = A^T$ وبالتالى فإن المصفوفة المتماثلة يجب أن تكون مربعة.

مصفوفة هيرميشان وتعني بالشكل:

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

والمرافق للمصفوفة A هو:

$$A^* \equiv \begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13} & \cdots & a^*_{1n} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & a^*_{23} & \cdots & a^*_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^*_{m1} & a^*_{m2} & a^*_{m3} & \cdots & a^*_{mn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة A تكون هيرميشيان إذا كان $A = (A^*)^T$ أى أن مصفوفة هيرميشيان هى مصفوفة مربعة ذات عناصر حقيقية فى القطر الرئيسى وعناصر مركبة مترافقة تشمل الأماكن المتقابلة لصورة مرآة بالنسبة للقطر الرئيسى نلاحظ أن $(A^*)^T = (A^T)^*$.

المصفوفة الغير فردية: المصفوفة المربعة $n \times n$ A ليست فردية (أو قابلة للتحويل) إذا وجدت مصفوفة مربعة أخرى $n \times n$ B حيث أن:

$$AB = BA = I$$

بحيث I هى مصفوفة الوحدة $n \times n$ وتسمى المصفوفة B مقلوب المصفوفة A غير فردية ونكتب $B = A^{-1}$ وإذا كانت A غير فردي فإن معادلة المصفوفة $Y = AX$ فى بند BI لها لكل قيمة للمصفوفة Y الحل الوحيد.

$$X = A^{-1}Y$$

B3 حسابات المصفوفات

جمع وطرح المصفوفات :

المصفوفتان اللتان لهما نفس الرتبة تكونان قابلتين للجمع أو الطرح والمصفوفتان التى لهما رتبتين مختلفتين لا يمكن جمعهما .

مجموع (أو طرح) مصفوفتين $m \times n$: $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ هى المصفوفة C $m \times n$ التى فيها كل عنصر هو مجموع (أو طرح) العنصرين المتناظرين فى كل من A ، B وبالتالى فإن $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

مثال B1 : إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

معكوس جمع (أو طرح) مصفوفتان هو جمع (أو طرح) المصفوفتان المعكوستان .

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

ضرب المصفوفتان

حاصل ضرب AB بهذا الترتيب للمصفوفة A $1 \times m$ والمصفوفة B $m \times 1$ هى المصفوفة C 1×1 : $C = [C_{11}]$ حيث :

$$C = [a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; \dots \; a_{1m}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1} \right]$$

لاحظ أن كل عنصر فى مصفوفة الصف تضرب فى العنصر المناظر فى مصفوفة العمود ثم يجمع حاصلا الضرب وغالبا تعرف C بالقيمة الحسابية C_{11} ونتعامل معها كرقم عادى من بين الأرقام التى يشملها عناصر A ، B .

وضرب AB بهذا الترتيب $m \times s$ للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ والمصفوفة $s \times n$ $B = [b_{ij}]$ هى المصفوفة $m \times n$: $C = [c_{ij}]$ بحيث :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \qquad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

مثـــال B2 :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + 1I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + 2(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A قابلة للضرب مع المصفوفة B أى أن حاصل الضرب AB متواجد فقط حينما يكون عدد أعمدة A مساوياً لعدد صفوف B وبالتالى فإنه إذا كان A مصفوفة 2 x 3 ، B مصفوفة 5 x 2 فإنه يمكن عمل الضرب AB ولكن حاصل الضرب BA غير جائز وإذا كانت كلا من D ، A مصفوفتان 3 x 3 فإن كلا الضربين DE ، ED جائز ومع هذا فإنه ليس ضرورياً أن يكون صحيح بأن ED = DE .

ومعكوس حاصل ضرب مصفوفتان هو حاصل ضرب معكوسيهما بعد عكس الترتيب .

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

إذا كانت AB مصفوفتان غير منفردتان ولهما نفس المقياس فإن AB تكون أيضاً غير منفردة مع

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

ضرب المصفوفة فى عدد حسابى

يعرف ضرب المصفوفة $A = [a_{ij}]$ بعدد حسابى k يعرف بالتالى :

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k \equiv [ka_{ij}]$$

أى أن كل عنصر فى A تضرب فى k ولاحظ الخواص

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \qquad k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) \qquad (k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$$

B4 محدود المصفوفة المربعة

ملحق بكل مصفوفة n x n : $A = [a_{ij}]$ دالة حسابية معينة لعناصر a_{ij} تسمى محدد A وهذا الرقم يعرف بالتالى :

$$\det \mathbf{A} \quad \text{or} \quad |\mathbf{A}| \quad \text{or} \quad \Delta_{\mathbf{A}} \quad \text{or} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بحيث يوضح الشكل الأخير عناصر المصفوفة A والتى منها تتحدد قيمته وللمحددات ذات الرتبة m = 1 ، m = 2 وتوضيحا لذلك :

$$|a_{11}| = a_{11} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

واستخدام هذه التعبيرات لقيم n الكبيرة يحتاج لجهد شاق وفى الغالب ما نتجنبها باستخدام نظرية مفكوم لابلاس (انظر فيما بعد) ومن المهم هنا أن نعرف بأن تعريف المحدد يكون بحيث :

$$\det \mathbf{AB} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

لأى محددين n x n AB فإنه يوجد خاصتين أساسيتين هما :

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A} \qquad \det k\mathbf{A} = k^n \det \mathbf{A}$$

وأخيراً فإن $\det A \neq 0$ (المحدد A) إذا وفقط إذا كانت A ليست منفردة .

مثـــــال B3 : حقق قاعدة ضرب المحددات لما يلى :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix}$$

لدينا

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{vmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{vmatrix} = 2(27+2\pi) - (9+4\pi)(-4) = 90 + 20\pi$$

But

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - 4(3) = -10$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{vmatrix} = -2(\pi) - 9(1) = -9 - 2\pi$$

وحقيقة $90 + 20\pi = (-10)(-9 - 2\pi)$.

نظرية مفكوك لابلاس

المحدد الأصغر M_{ij} للعناصر a_{ij} للمحدد ذو الرتبة n هو المحدد ذو الرتبة n - 1 والتى حصلنا عليها من حذف الصف والعمود المحتوى على a_{ij} . والعامل المساعد Δ_{ij} يعرف بالتالى :

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

وتقرر نظرية لابلاس أن :

فى المحدد للمصفوفة المربعة A اضرب كل عنصر فى الصف p (والعمود) بالعامل المساعد للعنصر المناظر فى الصف q (والعمود) واجمع حاصلى الضرب فيكون الناتج 0 عند $p \neq q$ ويكون مساوياً للمحدد A عند $p = q$.

وينتج عن ذلك مباشرة من نظرية لابلاس أنه إذا كان A له صفين أو عمودين متطابقان فإن المحدد $A = 0$ (ويجب أن يكون A مصفوفة وحيدة) .

عكس المصفوفات بالمحددات

قاعدة كرامر :

يمكن بيان نظرية مفكوك لابلاس بحاصل ضرب المصفوفات كالتالى :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

or $$\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\text{adj } \mathbf{A})\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}$$

حيث $A = [\Delta_{ji}]$ وهو معكوس المصفوفة للعوامل المساعدة للمصفوفة a_{ij} فى محدد A ، I هى صفوفة الوحد n x n .

وإذا كانت A ليست فردية فإنه يمكن إجراء القسمة بالمحدد $A \neq 0$ ونستدل أن :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A}$$

وهذا يعنى أن الحل الوحيد للنظام الخطى $Y = AX$ هو :

$$\mathbf{X} = \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A}\right)\mathbf{Y}$$

وهو قانون كرامر فى شكل المصفوفة . ونحصل على الشكل العام للمحدد بأخذ الصف $(r = 1, 2, 3, \dots n)$ لحل المصفوفة . وحيث أن الصف r للمحدد adj A هو :

$$[\Delta_{1r} \;\; \Delta_{2r} \;\; \Delta_{3r} \;\; \dots \;\; \Delta_{nr}]$$

فإننا نحصل على :

$$x_r = \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}}\right)[\Delta_{1r} \;\; \Delta_{2r} \;\; \Delta_{3r} \;\; \dots \;\; \Delta_{nr}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}}\right)(y_1\Delta_{1r} + y_2\Delta_{2r} + y_3\Delta_{3r} + \dots + y_n\Delta_{nr})$$

$$= \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}}\right) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(r-1)} & y_1 & a_{1(r+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(r-1)} & y_2 & a_{2(r+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(r-1)} & y_n & a_{n(r+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

يمكن تحقيق المتساوية الأخيرة باستخدام نظرية لابلاس للعمود r للمحدد المعطى .

B5 القيم الجذرية للمصفوفة المربعة

للنظام الخطى $Y = AX$ بالمصفوفة A n x n فإنه من المهم البحث عن «الإثارات» X التى ينتج عنها «التجاوب» المتناظر Y وبالتالى ضع $Y = \lambda X$ حيث λ عدد حسابى .

$$\lambda X = AX \qquad \text{or} \qquad (\lambda I - A)X = O$$

بحيث O هى مصفوفة صفرية n x 1 والآن إذا كانت المصفوفة $\lambda I - A$ ليست وحيدة فإن الحل $X = Y = O$ سينتج . وبالتالى فإنه للحصول على الحل الهام فإن قيمة λ يجب أن تكون بحيث تجعل $\lambda I - A$ مصفوفة وحيدة أى أنه يجب أن يكون لدينا :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

والحدود n لمعادلة المتعددة الحدود التى تشتمل على λ هى القيم الجذرية للمصفوفة A والحلول الهامة المناظرة X تعرف بالمتجهات الجذرية للمصفوفة A وبوضع $\lambda = 0$ فى الطرف الأيسر من معادلة الخواص السابقة نجد أن الحد الثابت i فى المعادلة يجب أن يكون :

$$\det(-A) = \det[(-1)A] = (-1)^n(\det A)$$

وحيث أن معامل λ^n فى المعادلة هو الوحدة الوحيدة فإن الحد الثابت سيكون أيضاً $(-1)^n$ مكررة فى ضرب جميع الجذور وبذلك فإن محدد المصفوفة المربعة هو حاصل ضرب جميع القيم الجذرية بالتتابع وهو تعريف مفيد فى المحددات .

B4 محدود المصفوفة المربعة

ملحق بكل مصفوفة n x n : $A = [a_{ij}]$ دالة حسابية معينة لعناصر a_{ij} تسمى محدد A وهذا الرقم يعرف بالتالى :

$$\det \mathbf{A} \quad \text{or} \quad |\mathbf{A}| \quad \text{or} \quad \Delta_{\mathbf{A}} \quad \text{or} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بحيث يوضح الشكل الأخير عناصر المصفوفة A والتى منها تتحدد قيمته وللمحددات ذات الرتبة m = 1 ، m = 2 وتوضيحا لذلك :

$$|a_{11}| = a_{11} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

واستخدام هذه التعبيرات لقيم n الكبيرة يحتاج لجهد شاق وفى الغالب ما نتجنبها باستخدام نظرية مفكوم لابلاس (انظر فيما بعد) ومن المهم هنا أن نعرف بأن تعريف المحدد يكون بحيث :

$$\det \mathbf{AB} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

لأى محددين n x n AB فإنه يوجد خاصتين أساسيتين هما :

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A} \qquad \det k\mathbf{A} = k^n \det \mathbf{A}$$

وأخيراً فإن $\det A \neq 0$ (المحدد A) إذا وفقط إذا كانت A ليست منفردة .

مثـــال B3 : حقق قاعدة ضرب المحددات لما يلى :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix}$$

لدينا

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{vmatrix} 2 & 9+4\pi \\ -4 & 27+2\pi \end{vmatrix} = 2(27+2\pi) - (9+4\pi)(-4) = 90 + 20\pi$$

But

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - 4(3) = -10$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{vmatrix} = -2(\pi) - 9(1) = -9 - 2\pi$$

وحقيقة $90 + 20\pi = (-10)(-9 - 2\pi)$.

ملحق C

أمثلة توضيحية
من معلم شاوم الالكترونى

لهذا الكتاب كتاب آخر رفيق له يسمى معلم شاوم الالكترونى والذى يستخدم طريقة ماثكاد التجارية ومصمم لمساعدتك لتعلم المادة العلمية بطريقة مباشرة . ويستخدم المعلم الالكترونى بيئة الرياضة الحية [LIVE-MATH] فى تكنولوجيا حساب برامج الحاسب ليوضح لك على الشاشة ما يقرب من مائة مسألة محلولة من هذا الكتاب بالإضافة إلى ملخص لطريقة التعامل مع النقاط النظرية رما يناظرها الكترونيا وما يتعلق بها . وفى الصفحات التالية إعادة صياغة عينات توضيحية مرئية من المعلم الالكترونى لتساعدك فى فهم الإمكانات الكبيرة لهذه الأداة الالكترونية التعليمية . وقارن هذه الشاشات المرئية المرافقة بالمسائل المحلولة من هذا الكتاب (أرقام الصفحات المناظرة مذكورة عند بداية كل مسألة) لترى أن كلاهما مكمل للآخر . وكيف أن ذلك مفيد جداً .

وفى معلم شاوم الالكترونى ستجد كل المادة العلمية والأشكال والمعادلات لكل مسألة محلولة بالإضافة لما يبدو فى شاشة الحاسب . وكما سترى فى الصفحات التالية فإن كل الرياضيات ستبدو فى شكل مألوف شاملة الوحدات . واختلاف الصور الرياضية والتى تلاحظها بين نشرة شاوم المطبوعة والمعلم الالكترونى مصممة لحث انتباهك للمادة العلمية أو لبيان الطرق المختلفة لحل المسائل الصعبة .

وبقراءتك للصفحات التالية تذكر أن كل رقم أو علامة أو شكل سيكون لها التأثير الكبير حينما تراها على شاشة الحاسب . ويمكنك تغيير بيانات البداية لمسألة وستلاحظ أشكالاً جديدة للمخرج تحسب أمام عينيك كما يمكنك تغيير أى معادلة وفى الحال سترى التأثير على الحسابات الرقمية على الحل . فكل معادلة أو شكل أو رقم تراه قابل للاختبار وكل مسألة محلولة موجودة تصبح ورقة عمل حية يمكنك تعديلها لحل عشرات المسائل المشابهة . والمعلم الالكترونى المصاحب لهذا الكتاب سيساعدك فى تعلم واسترجاع المادة العلمية التى درست فى هذا الكتاب كما يمكنك استعماله كأداة تشغيل لحل المسائل وعلامة ماسكاد المبينة على اليسار

مطبوعة خلال هذا البيان لتبين المسال الموجودة فى المعلم الالكترونى .

وللحصول على معلومات إضافية عن المعلم الالكترونى المرافق بما فى ذلك متطلبات النظام انظر من فضلك إلى غلاف الكتاب الخلفى .

متوسط القدرة والطاقة :

(الدوائر الكهربية لشاوم، الطبعة الثالثة ، المسألة المحلولة 3-1 ص 5-4)

البيــان : تحمل الدائرة الخطية التيار $i(t, \omega)$ حيث ω هى تردد الزاوية – يوجد فرق جهد على طرفى العنصر $v(\omega, t)$. أوجد الطاقة W_T المنقولة فى فترة واحدة للدالة الجيبية ومتوسط القدرة P_{avg} .

مكونات النظام :

$$mA = 10^{-3} \cdot amp \qquad mW = 10^{-3}\ watt \qquad Hz = \frac{1}{sec}$$

قيم التيار والجهد .

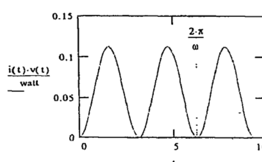
$$I_0 = 2.5 \cdot mA \qquad V_0 = 45 \cdot volt$$

نفترض أن التردد $\omega = 1\ Hz$

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad v(t) = V_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

الحل :يكون تغير كلا من التيار والجهد طبقا للموجة الجيبية المعروفة من خلال الزمن . حينما تضربان فى بعضهما (القدرة = vi) فإن تغيرهما بالنسبة للزمن يبدو هكذا :

$$t = 0 \cdot sec, \frac{.1}{\omega} .. 3 \cdot \frac{\pi}{\omega}$$



الطاقة هى المساحة أسفل المنحنى أو التكامل خلال دورة واحدة للقدرة اللحظية V*i .

$$W_T = \int_{0 \cdot sec}^{\frac{2 \cdot \pi}{\omega}} v(t) \cdot i(t)\, dt$$

$$W_T = 0.353 \cdot joule$$

القدرة اللحظية هى بالتالى الطاقة مقسومة على زمن دورة واحدة .

$$P_{avg} = \frac{W_T}{2 \cdot \frac{\pi}{\omega}} \qquad P_{avg} = 56.25 \cdot mW$$

حاول تغيير قيمة التردد ولاحظ أن الطاقة فى دورة واحدة تتغير (والدورات الأقصر تحتوى على قدرة أقل) ولكن هذه القدرة P_{avg} لا تعتمد على ω وهى بالتالى ثابتة وتتوقف القدرة المتوسطة على قيم الموجات الجيبية كالتالى :

$$P_{avg} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2} \qquad P_{avg} = 56.25 \cdot mW$$

حاول حل التكامل جبريا لتتأكد من الصحة .

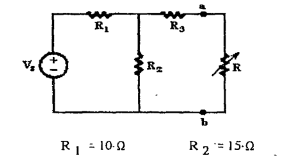
نظرية القدرة العظمي المنقولة :

(الدوائر الكهربية لشاوم، الطبعة الثالثة، المسألة المحلولة 16-4 ، ص 52)

البيـان : أوجد المقاومة المتغيرة R والتى تنتج من أكبر قدرة منقولة على الطرفين a ، b للدائرة المبينة فيما بعد .

(حينما تكون المقاومة قابلة للتغيير فإنها تسمى مجزئ جهد) .

مكونات النظام



Ω = ohm

$V_s = 100$ volt

$R_1 = 10 \cdot \Omega \qquad R_2 = 15 \cdot \Omega \qquad R_3 = 5 \cdot \Omega$

الحـل : نحصل أولاً على مكافئ ثفنين للدائرة باستبعاد المقاومة المتغيرة R واتبع نفس نظام الحل المبين فى المسألة 6-4 . ومكافئ ثفنين (للدائرة المفتوحة) للجهد هو :

$$V' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_s \qquad V' = 60 \cdot volt$$

مقاومة ثفنين المكافئة

$$R' = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad R' = 11 \cdot ohm$$

باستخدام نظرية القدرة العظمى المنقولة فى الفصل 4 فإن أكبر قدرة منقولة تحدث عند $R = R'$ وبالتالى فإن أكبر قدرة منقولة هى :

$$P_{max} = \frac{V'^2}{4 \cdot R'} \qquad P_{max} = 81.818 \cdot watt$$

لتقتنع بهذا العمل حاول إيجاد القدرة المفقودة فى المقاومة R باستخدام طرق تبسيط الشبكة المعروفة كما هو مبين فى المسألة 7-4 وستصل إلى تعبير القدرة التالى :

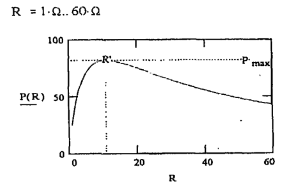
$$P(R) = \frac{\left[\frac{V_s \cdot R_2 \cdot R}{\left[R_1 \cdot (R + R_3 + R_2) + R_2 \cdot R + R_2 \cdot R_3\right]}\right]^2}{R}$$

لتقتنع بهذا العمل حاول إيجاد القدرة المفقودة فى المقاومة R باستخدام طرق تبسيط الشبكة المعروفة كما هو مبين فى المسألة 7-4 وستصل إلى تعبير القدرة التالى :

$$P(R) = \frac{\left[\frac{V_s \cdot R_2 \cdot R}{\left[R_1 \cdot (R + R_3 + R_2) + R_2 \cdot R + R_2 \cdot R_3\right]}\right]^2}{R}$$

ارسم هذا التعبير مع قيم مختلفة للمقاومة R وتبين أن القيمة العظمى هى :

$R = 1\cdot\Omega..60\cdot\Omega$



والآن تبين لك فائدة نظرية القدرة العظمى المنقولة ويمكن استخدام تبسيط الشبكة للحصول على هذه القيمة العظمى باستخدام التفاضل ولكن هذه الطريقة تستغرق وقتا طويلا بالنسبة للطريقة البسيطة باستخدام مكافئ ثفنين .

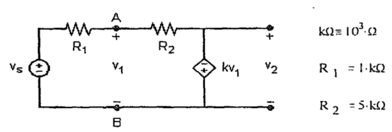
ملاحظة للمؤلف: المكتوب بخط ثقيل والمكتوب تحته خط فى هذه المسألة يبين نوعاً مختاراً م المسائل وإذا كنت تعمل بالحاسب فإن الضغط مرتان على هذه الأجزاء بالفأرة سيعود بك إلى الملف الخاص بهذه المادة .

التغذية الخلفية في دائرة المكبر المثالى :

(الدوائر الكهربية لشاوم، الطبعة الثالثة ، مثال 5-4 ص 60)

البيان: (أ) أوجد V_2/V_s كدالة فى كسب الدائرة المفتوحة k . (ب) احسب V_s/V_2 عند 1000 ، k = 100 وناقش النتائج.

مكونات النظام :



$k\Omega \equiv 10^3 \cdot \Omega$

$R_1 = 1 \cdot k\Omega$

$R_2 = 5 \cdot k\Omega$

الحل : المكبر المثالى هو جزء من الدائرة على يمين العقدتان A ، B فى الشكل مع مقاومة التغذية الخلفية R_2 بدلا من الدائرة المفتوحة وأضيفت مقاومة التغذية الخلفية للتحكم فى الكسب الكلى للمكبر وحيث :

$$v_2 = k \cdot v_1 \qquad \text{or} \qquad v_1 = \frac{-v_2}{k}$$

استخدم KCL عند العقدة A لتعطى :

$$\frac{v_1 - v_S}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{\left(\frac{-v_2}{k} - v_S\right)}{R_1} + \frac{\left(\frac{-v_2}{k} - v_2\right)}{R_2} = 0$$

باستخدام منظم العمليات الرمزى ماثكاد يمكن لنا الحل لإيجاد V_2 (يمكن الاستغناء عن هذا الجزء إذا كنت مستخدما لماكية ماثكاد) للحصول على معلومات أكثر عن طريقة استخدام منظم العمليات الرمزى انظر معلم ماثكاد.

$$v_2 = v_S \cdot \frac{-R_2 \cdot k}{(R_2 + R_1 + R_1 \cdot k)} \qquad \frac{v_2}{v_S} = \frac{R_2 \cdot k}{(R_2 + R_1 + R_1 \cdot k)}$$

وبحدود النسب

$$b = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{in this case} \qquad b = 0.167$$

يمكن كتابة الكسب V_2/V_s

$$G_{neg} = \frac{v_2}{v_S} \qquad \text{(كلمة neg تمثل كسبا معكوسا)}$$

$$G_{neg}(k) = (1 - b) \cdot \frac{-k}{1 + b \cdot k}$$

(ب) للقيم المعطاه للثابت k فإن المكاسب تكون :

$k_1 = 100$ $\quad\quad G_{neg}(k_1) = -4.717$

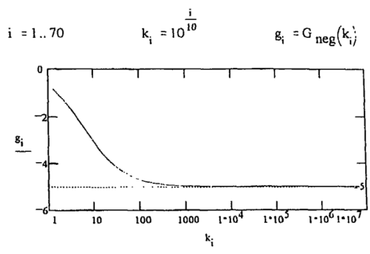
$k_2 = 1000$ $\quad\quad G_{neg}(k_2) = -4.97$

وبذلك عند زيادة k لعشرة أمثالها ينشأ تغيير طفيف فى الكسب V_2/V_s

$$\frac{G_{neg}(k_2) - G_{neg}(k_1)}{G_{neg}(k_1)} = 5.368 \cdot \%$$

ودعنانبين ذلك بوضوح أكثر بدراسة V_2/V_s بالرسم فى k

$i = 1..70$ $\quad\quad k_i = 10^{\frac{i}{10}}$ $\quad\quad g_i = G_{neg}(k_i)$



وشيىء واحد يجب ملاحظته أنه للقيم الكبيرة للثابت k فإن V_2/V_s تقترب من $-R_2/R_1$

$$G_{neg}(\infty) = -5$$

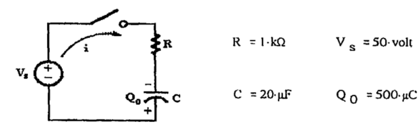
وبذلك فإنه مع التغذية الخلفية طالما أن k ليست صغيرة جداً فإن الكسب الكلى لا يتوقف على تغيرات k .

تكوين الجهد المستمر علي طرفي المكثف :

(الدوائر الكهربية لشاوم ، الطبعة الثالثة ، المسألة المحلولة 7-7 ص 144) .

البيـان: أقفل المفتاح فى الدائرة المبينة فيما يلى عند الزمن $t = 0$ وفى هذه اللحظة كان على المكثف الشحنة Q_0 بالإشارات المبينة . أوجد i ، q عند $t > 0$ وارسم شكلاً للقيمة q .

مكونات الدائرة :



$R = 1 \cdot k\Omega$ $\quad V_s = 50 \cdot volt$

$C = 20 \cdot \mu F$ $\quad Q_0 = 500 \cdot \mu C$

$k\Omega \equiv 10^3 \cdot ohm$ $\quad \mu F \equiv 10^{-6} \cdot farad$ $\quad \mu C \equiv 10^{-6} \cdot coul$

$ms \equiv 10^{-3} \cdot sec$ $\quad mA \equiv 10^{-3} \cdot amp$

الحـل: نعلم أنه عند $t > 0$ فإن العلاقة بين i ، C ، v (وهو الجهد على C) هو :

$$i = C \cdot \frac{d}{dt} v$$

عند $t > 0$ فإن KVL حول الحلقة يعطى :

$$V_s = R \cdot i + v(t) = R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} v + v$$

$$\frac{d}{dt} v + \frac{v}{R \cdot C} = \frac{V_s}{R \cdot C}$$

مع أخذ الحالة الابتدائية على v_C فإن

$$v(0 \cdot ms) = \frac{-Q_0}{C}$$

(الإشارة السالبة تعنى أن القطبية المبينة فى عكس إتجاه التيار)

الحل الخاص (أو القصرى) يحقق المعادلة التفاضلية ولكن ليس الحالة الابتدائية .

$$v_p(t) = V_s$$

وهذا الحل الخاص صحيحا لأنه عند $t = \infty$ سيكون التيار صفراً وبالتالى لن يكون هناك خفض فى الجهد على طرفى R . والحل المتجانس (أو التجاوب الطبيعى) .

$$v_h(t)=A\cdot \exp\left(\frac{-t}{R\cdot C}\right)$$

يمكن إضافته . ويمكن ضبط قيمة A بحيث يكون الحل الكلى $v_p + v_h$ تحقق كلا المعادلتين :

$$v(t)=v_p(t) + v_h(t)=V_s + A\cdot \exp\left(\frac{-t}{R\cdot C}\right)$$

ومن الحالة الابتدائية نصل إلى قيمة A .

$$v(0\cdot ms)=\frac{-Q_0}{C}=V_s + A \qquad \frac{-Q_0}{C}=-25\cdot volt$$

$$A := \frac{-Q_0}{C} - V_s$$

وبالتالى

$$v(t) := \left(\frac{-Q_0}{C} - V_s\right)\cdot \exp\left(\frac{-t}{R\cdot C}\right) + V_s$$

والتى منها

$$q(t) := C\cdot v(t) \qquad \text{and} \qquad i(t) := \frac{d}{dt}q(t)$$

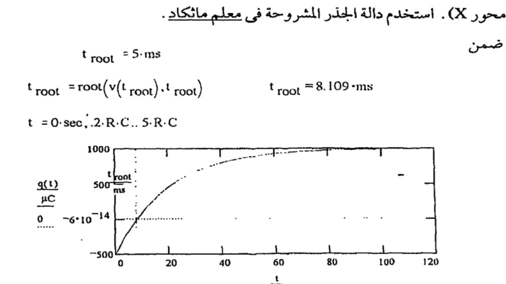
رسمنا أشكال q(t) ، i(t) ، v(t) فيما يلى لإيجاد فترة تكون $q = 0$ (حيث يقطع المنحنى محور X) . استخدم دالة الجذر المشروحة فى معلم ماثكاد .

ضمن

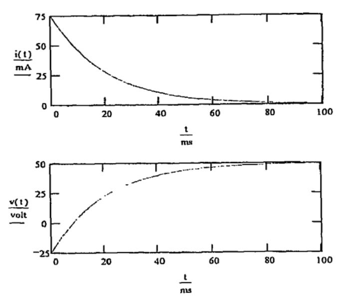
$$t_{root} := 5\cdot ms$$

$$t_{root} := root\left(v\left(t_{root}\right), t_{root}\right) \qquad t_{root} = 8.109\cdot ms$$

$$t := 0\cdot sec, .2\cdot R\cdot C .. 5\cdot R\cdot C$$



المنحنى السابق يبين أن الشحنة تتغير من القيمة الابتدائية لها إلى الشحنة المحددة بجهد المنبع المتصل عند $t = 0$ وحيث أن هاتين الشحنتين لهما قطبية متضادة فإن المنحنى يمر بالصفر كما هو مبين فى الشكل .

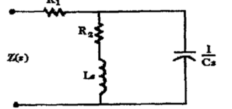


الممانعة المتوقفة علي التردد :

(الدوائر الكهربية لشاوم، الطبعة الثالثة ، المسألة المحلولة 11-8 ص 175)

البيــان : أوجد المعاوقة $Z_{in}(s)$ للدائرة المبينة فيما بعد في المجال $0 < s < \infty$ ارسم القيمة والزاوية على مقياس لوغارتمى .

مكونات النظام:



$R_1 = 2 \cdot \Omega \qquad L = 2 \cdot henry$

$R_2 = 2 \cdot \Omega \qquad C = .25 \cdot farad$

الحــل: باستخدام طريقة التبسيط القياسية للشبكة . أوجد المعاوقة المكافئة لهذه الدائرة .

$$Z_{in}(s) = \left[R_1 + \frac{(R_2 + L \cdot s) \cdot \left(\frac{1}{C \cdot s} \right)}{(R_2 + L \cdot s) + \frac{1}{C \cdot s}} \right]$$

$$Z_{in}(s) := \frac{(R_1 \cdot R_2 \cdot C \cdot s + R_1 \cdot L \cdot s^2 \cdot C + R_1 + R_2 + L \cdot s)}{(R_2 \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1)}$$

استخدم منظم العمليات الرمزى لتبسيط هذه العلاقة (إذا كنت مستخدما ماكينة ماثكاد فلست فى حاجة لذلك).

$$Z_{in}(s) = \frac{\left[R_1 \cdot L \cdot s^2 \cdot C + (R_1 \cdot R_2 \cdot C + L) \cdot s + R_1 + R_2\right]}{\left(R_2 \cdot C \cdot s + L \cdot s^2 \cdot C + 1\right)}$$

إقسم كلا من البسط والمقام على LC .

$$Z_{in}(s) = \frac{\left(R_1 \cdot s^2 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C} \cdot s + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C}\right)}{\left(s^2 + \frac{R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C}\right)}$$

(أ) عند $s = 0$.

$$Z_{in}\left(0 \cdot \frac{rad}{sec}\right) = 4 \cdot \Omega$$

وهى الممانعة المتوقفة مع منبع التيار المستمر الثابت : فيكون المكثف كدائرة مفتوحة والملف لدائرة مقصورة كما هو مبين فى الفصل 7 وتبقى فقط المقاومتان على التوالى .

(ب) عند $s = j4$ rad/s

$$Z_{in}\left(j \cdot 4 \cdot \frac{rad}{sec}\right) = 2.038 - 1.132j \cdot ohm$$

ولدواعى استعمال المتجهات :

$$\left|Z_{in}\left(j \cdot 4 \cdot \frac{rad}{sec}\right)\right| = 2.331 \cdot ohm \qquad \arg\left(Z_{in}\left(j \cdot 4 \cdot \frac{rad}{sec}\right)\right) = -29.055 \cdot deg$$

وهذه هى الممانعة المتدفقة للمنبع $\sin(4t)$ أو $\cos(4t)$.

(جـ) بالنظر فى الدائرة $Z_{in}(\infty) = 2\ \Omega$ ولكى نرى ذلك اقسم كل حد فى علاقة الممانعة بالقيمة s^2 . الحدود التى بها s ، s^2 فى المقام ستكون صفرا فى النهاية وكل ما يتبقى هو R_1 .

$$Z_{in}(s) = \frac{\left(R_1 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C \cdot s} + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C \cdot s^2}\right)}{\left(1 + \frac{R_2}{L \cdot s} + \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2}\right)} \qquad R_1 = 2 \cdot \Omega$$

ويستطيع أيضاً منظم العمليات الرمزى الوصول للقيمة Z_{in} حينما s تقترب من ∞ (إذا كنت مستخدما ماكتبه ماثكاد فلست فى حاجة لذلك).

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\left(R_1 \cdot s^2 + \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot C + L}{L \cdot C} \cdot s + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot C}\right)}{\left(s^2 + \frac{R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C}\right)} \quad \text{yields} \quad R_1$$

عند الترددات العالية جدا يبدو أن المكثف كما لو كان دائرة قصيرة على طرفى فرع RL كما نوقش فى الفصل 12 .

دعنا نقوم بدراسة صغيرة على مدى توقف الممانعة وزاوية الوجه على التردد وللحصول على مدى واسع لتغير s فإن استخدام المقياس اللوغارتمى الذي يجعل المسافات متساوية لمضروب 10 .

أقل قيمة فى الرسم $$s_{low} := .01 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

أكبر قيمة فى الرسم $$s_{high} := 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

عدد النقط $$N := 100 \qquad i := 0 .. N - 1$$

حجم الخطوة $$r := \log\left(\frac{s_{low}}{s_{high}}\right) \cdot \frac{1}{N} \qquad r = -0.04$$

متغير المدى $$s_i := s_{high} \cdot 10^{i \cdot r}$$

من الملاحظ أن تصرف الدائرة يتغير من حالة لأخرى وتصل الممانعة إلى قيمتها العظمى عند تردد الرنين وإضافة أكثر فى مادة تجاوب التردد والرنين سيأتى فى الفصل 12 .

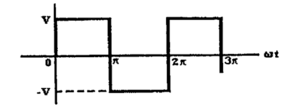
ملاحظة المؤلف: لاحظ أنه يمكن إدخال الأعداد المتجهة أو التخيلية فى ماثكاد إما بالشكل الأسى Ae^{jphase} وبالإحداثيات. وحينما يحسب الحاسب إجابة تخيلية فسيؤديها بالشكل الإحداثى ولكن يمكن استخراج القيمة والزاوية بسهولة كما هو مبين سابقا باستخدام المعاملات | | ، arg للقيمة الحسابية والزاوية بالترتيب ولاحظ أيضا أنه تم التعامل أتوماتيكيا مع عكس المصفوفة ولذلك فإن المحددات والمحددات الفرعية والمستخدمة فى النسخة المعدلة لشاوم ليست مطلوبة.

متوالية فورير للموجة المربعة :

(الدوائر الكهربية لشاوم، الطبعة الثالثة، المسألتين المحلولتين 1-17 ، 8-17 ص 419 ، ص 424

لبيان : (أ) أوجد متوالية فورير المثلثية للموجة المربعة ذات الفترة T والمبينة فيما يلى وارسم خط الطيف. أعد تركيب الموجة فى الزمن باستخدام معاملات فورير. (ب) أوجد معاملات فورير للمتوالية الأسية وقارنها بمعاملات المثلثية.

تركيب النظام :



$T := 2\cdot\pi$ $\qquad\qquad$ $V := 10\cdot volt$

الحـل : فى الفترة $f(t) = V : 0 < \omega t < \pi$ وفى الفترة $f(t) = -V : \pi < \omega t < 2\pi$. لاحظ أن هذه الموجة تتفق مع حالات ديرشلت فى الفصل 17 لأنها تحتوى على عدد محدد من عدم الاستمرارية لكل فترة. والقيمة المتوسطة للموجة صفرا ولذلك بالنظر فى الموجة $a_0/2 = 0$ ونحصل على معاملات جيب التمام بعد كتابة ناتج التكامل بالدوال المستخدمة كالتالى :

$a_0 = 0V$ نظراً لأن القيمة المتوسطة صفرا

$a_0 := 0\cdot volt$ $\qquad$ since the average value is zero.

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\left[\int_0^{\frac{T}{2}} V\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\, d(\omega\cdot t) + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-V)\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\, d(\omega\cdot t)\right]$$

وبالتعويض $u = \omega.t$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \left[\int_0^{\frac{T}{2}} V \cos(n \cdot u)\, du + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-V) \cdot \cos(n\, u)\, du \right]$$

اختار منظم العمليات الرمزى للحمل ومن قائمة الرموز اختار العلاقة السابقة كلها ثم اختار إجراء العملية رمزياً (إذا كنت مستخدماً لماكينة ماثكاد فليست فى حاجة لذلك) .

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \left(2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot T\right)}{n} \cdot V - \frac{\sin(n \cdot T)}{n} \cdot V \right) = 0 \cdot volt$$

والمفروض أن تتوقع هذه النتيجة لأن الموجة فردية وبذلك تشمل متوالية فورير على حدود الجيب فقط .

ومع موالات الحل بالتكامل لحدود الجيب .

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \left[\int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, d(\omega \cdot t) + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-V) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, d(\omega \cdot t) \right]$$

وبالتعويض $u = \omega.L$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \left[\int_0^{\frac{T}{2}} V \cdot \sin(n \cdot u)\, du + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-V) \cdot \sin(n \cdot u)\, du \right]$$

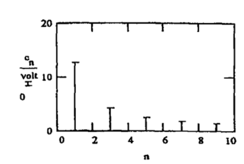
ومرة أخرى حل هذه العلاقة رمزيا وبسط الناتج :

$$b_n := \frac{2}{T} \cdot \left(-2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot T\right)}{n} \cdot V + \frac{1}{n} \cdot V + \frac{\cos(n \cdot T)}{n} \cdot V \right)$$

تعرف العشرة حدود الأولى لقيم التوافقيات بدلالة معاملات b_n .

$$n_{max} \equiv 10 \qquad n \equiv 1 .. n_{max} \qquad c_n = \sqrt{(b_n)^2}$$

وأسقطت المعاملات a_n من هذه العلاقة لأنها جميعا أصفارا والآن نقوم بتجهيز رسم خط الطيف .

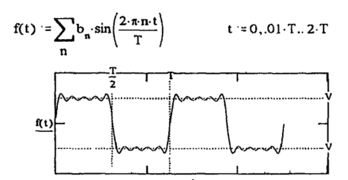


استخدم نوع الراسم "error" لنسخ خطوط الطيف ولعمل ذلك ارسم كلا من المعاملات وخط الصفر واختار نوع الراسم "error" لكليهما . وللحصول على معلومات أخرى فى اختيار طريقة الرسم (انظر معلم ماثكاد A) .

تحتوى المتوالية على حدود التوافقيات الفردية للجيب (الحدود الزوجية صفر وكما كان متوقعاً بالنظر فى الموجة للتماثل) . ويحتوى التماثل النصف موجى على التوافقيات الفردية . ويمكن للمتوالية أن تحتوى على حدود جيب التمام إذا تحركت نقطة الأصل للموجة ولكن ستبقى فقط الحدود الفردية للتوافقيات فى الشكل الطيفى . حاول فى ذلك لترى النتيجة .

لتقتنع بنفسك أن هذه المتوالية تمثل حقيقية موجة مربعة أعد تركيب الموجة التالية :

$$f(t) := \sum_{n} b_n \cdot \sin\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n\cdot t}{T}\right) \qquad t := 0, .01\cdot T .. 2\cdot T$$



يمكنك أن ترى كيف أن الشكل يبين تقريباً الموجة المربعة المطلوبة وذلك اعتماداً على الرمز n حاول تغيير قيمة n_{max} لترى كيف يتأثر شكل الموجة تحسينا أو سوءاً .

(ب) فى الفترة $-\pi < \omega t < 2\pi$ ، $f(t) = -V$ فى الفترة $0 < \omega < t < \pi$ ، $f(t) = V$. والموجة فردية لذلك فإن $A_0 = 0$ ، A_n ستكون تخيلية خالصة .

$$A_0 := 0\cdot\text{volt}$$

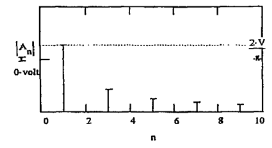
$$A_n = \frac{1}{T}\cdot\left[\int_{\frac{-T}{2}}^{0} -V\cdot e^{-j\cdot n\cdot\omega\cdot t}\, d(\omega\cdot t) + \int_{0}^{\frac{T}{2}} V\cdot e^{-j\cdot n\cdot\omega\cdot t}\, d(\omega\cdot t)\right]$$

بالتعويض $u = \omega.t$

$$A_n = \frac{1}{T}\cdot\left[\int_{\frac{-T}{2}}^{0} -V\cdot e^{-j\cdot n\cdot u}\,du + \int_{0}^{\frac{T}{2}} V\cdot e^{-j\cdot n\cdot u}\,du\right]$$

والآن جهز رسم خط الطيف .

لاحظ أن القيمة أخذت للتعبير عن حجم المعاملات وليس بالصفة المركبة .



Note that the magnitude has been taken to display the size of the coefficients rather than their complex character.

ويبين شكل الطيف قيم الترددات الموجبة فقط وبتجميع القيم عند n+ ، n- يؤدى إلى نفس الشكل الطيفى المرسوم سابقاً فى الجزء (أ) .

ويمكن الحصول على معاملات المتوالية المثلثية باستخدام

$$n = 0..n_{max}$$

معاملات جيب التمام هى :

$a_n = 2\cdot Re(A_n)$ $a^T = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\cdot volt$

وكما سبق فإن معاملات الجيب هى :

$b'_n = -2\cdot Im(A_n)$

$b'^T = (0\ \ 12.732\ \ 0\ \ 4.244\ \ 0\ \ 2.546\ \ 0\ \ 1.819\ \ 0\ \ 1.415\ \ 0)\cdot volt$

قارن مع القيم الأصلية

$b^T = (0\ \ 12.732\ \ 0\ \ 4.244\ \ 0\ \ 2.546\ \ 0\ \ 1.819\ \ 0\ \ 1.415\ \ 0)\cdot volt$





ELECTRIC CIRCUITS



OVER 30 MILLION SOLD

لماذا تشترى كتاب شــوم؟
لأن كل كتاب يحتوى على النظرية الأساسية والتعريفات ومئات من المسائل المحلولة بعناية وكذلك ... مسائل غير محلولة لمساعدة الطالب على التفوق.

الهـنـدسـة
- المبادىء الرقمية
- تكنولوجيا الإلكترونيات
- الدوائر الكهربائية جديد
- الماكينات الكهربية
- نظم القوى الكهربية
- النبائط الإلكترونية ودوائرها
- أساسيات الهندسة الكهربائية جديد
- الديناميكا الحرارية
- مقاومة المــواد
- ميكانيكا الموائع والهيدروليكا
- اهتزازات ميكانيكية
- الميكانيكا الهندسية - استاتيكا
- الميكانيكا الهندسية - ديناميكا

الرياضيات والحاسبات
- الاحـتمالات
- الإحصـــاء
- بحوث العمليات
- التحليل العددى
- تحليل المتجهات
- الجــبر الخــطــي
- التفاضل والتكامل المتقدم
- حساب التفاضل والتكامل
- الدوال المركـبة
- الرياضيات الأساسية للحاسب
- الرياضيات المتقدمة
- المعادلات التفاضلية جديد
- الميكانيكا العــامة
- نظــرية الفــئة
- مبادىء حساب التفاضل والتكامل
- البرمجة بلغة الباسكال
- البرمجة بلغة البيسك (عـربى)
- البرمجة بلغة ++C (جزئين) جديد
- البرمجة بالفورتران
- البرمجة بلغة الكوبل
- البرمجة بلغة C الجزء الأول
- البرمجة بلغة C الجزء الثانى
- أساسيات الفورتران
- أساسيات الكوبول

الكيمياء والفــيزياء
- الكيمياء العضوية
- الكيمياء العــامة
- الفيزياء الجامعية جديد
- مبادىء الفيزياء
- البصــريات جديد

الزراعة والعلوم الحيوية
- الــوراثة

الاقتصاد وإدارة الأعمال
- الإحصاء والإقتصاد القياسى
- الاقتصاد الدولى
- النظرية الاقتصادية الكلية
- نظرية اقتصاديات الوحـدة
- أصـول المحاسبة (١)
- أصـول المحاسبة (٢)

التربية وعلم النفس
- مقدمة فى علم النفس
- سيكولوجية التعـلم



INTERNATIONAL HOUSE FOR CULTURAL INVESTMENTS

P.O.Box 5599 Heliopolis West. Cairo/Egypt
Tel.: 2972344 - 2957655, Fax:(00202) 2957655